

Seminar Empirische Prozesse

Dennis Dobler

Markus Pauly

Institut für Statistik
Universität Ulm

Ulm, Wintersemester 15/16

Wichtige stochastische Prozesse

Anwendung auf i.i.d. ZV $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{R}^d -ZV):

- Empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(\xi_i), \quad t \in \mathbb{R}$$

Frage: Stoch. oder f.s. Konv. für F_n (als Prozess!) gegen VF F ?

⇒ Glivenko-Cantelli-Theoreme: (stochastisch oder f.s.)

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - E(f(\xi_i)) \right| \longrightarrow 0$$

$$\text{Bsp. 1: } \sup_t |F_n(t) - F(t)| \longrightarrow 0$$

- Empirischer Prozess

$$X_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Frage: Schwache Konvergenz für X_n (als Prozess!) gegen X ?

⇒ Donsker-Theoreme: (“in Verteilung” gegen Gauß-Prozess)

$$X_n \longrightarrow X \quad \text{glm. über Fkt.klasse } \mathcal{F}$$

mit Konvergenz der “Randverteilungen”

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - E(f(\xi_i)) \right) \xrightarrow{d} N(0, \text{Var } f(\xi_i)), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Bsp. 2: Für $F(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $X_n \xrightarrow{d}$ Brownsche Brücke

Wieso, weshalb, warum? Praktisch interessant!

Viele Statistiken als Funktionale hiervon, z.B.

- Cramér-von Mises-Statistik
- Higher-Criticism von Tukey
- Nelson-Aalen-Schätzer
- Kaplan-Meier-Schätzer
- Bootstrap-Versionen

⇒ Konsistenz und Verteilungskonv.! (Durch obige Thm & δ -Methode)

Ganz breites Anwendungsfeld

& Standardwerkzeug der modernen mathematischen Statistik!

Wieso, weshalb, warum? Theoretisch interessant!

Arbeiten auf natürlichem Prozessraum
statt umständlich mit Skorohod-Topologie.
(ohne Messbarkeit \Rightarrow äußere Maße)

Steuerung der Thm über *Entropie* von \mathcal{F}
(Ganz heißes Thema in Biologie und Physik!)

Ergebnisse für diverse Funktionenklassen \mathcal{F} , z.B.

- Vapnik-Cervonenkis,
- abzählbare Funktionenfolge mit Momentenbed.,
- elliptische Funktionenklasse.

Formalitäten

Bei Interesse: E-Mail an mich (dennis.dobler@uni-ulm.de)

Vorbesprechung in **Woche 1** der Vorlesungszeit. Danach:

- 1. Vortrag: Einleitend von mir (Woche 2)
- ab 2. Vortrag: Von Euch (ab Woche 3)

Themenvergabe: abhängig von Teilnehmerzahl (**max. 10**)

Zielgruppe: **Master MaBi, WiMa, Mathe!**

Voraussetzungen: **Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik** sowie **Stochastik I**