Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 10

Präsentation in der Übung am 01.07.15

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein ergodischer Punktprozess mit der Intensität $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_{B(o,n)}}{\nu_d(B(o,n))} = \lambda\right) = 1.$$

Hinweis: Adaptiere den Beweis von Theorem 3.18.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)
Sei $U \sim U([0,1]^d)$ eine auf $[0,1]^d$ gleichverteilte Zufallsvariable. Betrachte den Punktprozess $X = \{z + U, z \in \mathbb{Z}^d\}$.

(a) Zeige, dass X stationär ist.

(b) Zeige, dass X ergodisch ist.

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 Punkte)
Wir zeigen im Folgenden, dass eine ergodische Markow-Kette als ergodisches dynamisches System dargestellt werden kann. Sei $X = \{\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots\}$ eine Markow-Kette mit endlichem Zustandsraum E, stationärer eindimensionaler Rand-Verteilung α und Übergangsmatrix P. Zeige nun folgende Aussagen:

(a) Definiere für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\mathbf{T}_n : S \to S$ durch $\mathbf{T}_n((\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)) = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ mit $y_i = x_{i+n}$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$, wobei $S = \{x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), x_i \in E$ für alle $i \in \mathbb{Z}\}$ Sei $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Zeige, dass $(S, \mathcal{S}, \mu, \mathbf{T})$ ein dynamisches System ist, wobei die σ-Algebra $\mathcal{S}$ durch die Zylindermengen von S erzeugt wird und μ die Verteilung von X bezeichnet (vgl. den nachfolgenden Hinweis).

(b) Sei X irreduzibel und aperiodisch. Seien $n, n' \geq 1$ und $a \in E^{2n+1}, b \in E^{2n'+1}$ beliebig. Seien ferner $A = \{x \in E, (x_{-n}, \ldots, x_n) = (a_{-n}, \ldots, a_n) = a\}$ und $B = \{x \in E, (x_{-n'}, \ldots, x_{n'}) = (b_{-n'}, \ldots, b_{n'}) = b\}$. Zeige zunächst, dass

$$\mu(A \cap \mathbf{T}_{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B)p^{(k-n-n'-1)}_{a_n, b_{-n'}}/\alpha_{b_{-n'}}$$

für alle $k \geq n + n' + 1$ und nutze dann Aussage $(\star)$ aus dem nachfolgenden Hinweis, um zu zeigen dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A \cap \mathbf{T}_{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

(c) Sei X irreduzibel und aperiodisch. Zeige, dass $(S, \mathcal{S}, \mu, \mathbf{T})$ ergodisch ist.

Hinweis: Sei $E = \{1, \ldots, m\}$. *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $S = \{x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), x_i \in E$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}\}$ *die Menge aller* E*-wertigen Folgen. Der Raum* S *sei mit der* σ*-Algebra*

$$\mathcal{S} = \sigma(\{\{x \in E, (x_{-n}, \ldots, x_n) = (a_{-n}, \ldots, a_n) = a\}, a \in E^{2n+1}\})$$

versehen. Eine $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$*-messbare Abbildung* $X : \Omega \to S$ *heißt zeit-diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum* E*, wenn Vektoren* $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,m}) \in [0,1]^m, i \in \mathbb{Z}$ *(eindimensionale Rand-Verteilungen) und eine Matrix* $P = (p_{x,y})_{x,y \in E}$ *(Übergangsmatrix) existieren, sodass gilt:*

- $\sum_{x \in E} \alpha_{i,x} = 1$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}$.
- $p_{x,y} \in [0,1]$ *für alle* $x, y \in E$ *und* $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$ *für alle* $x \in E$.
- $\mathbb{P}(X_i = x) = \alpha_{i,x}$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}, x \in E$.
- $\mathbb{P}(X_{-n} = x_{-n}, X_{-n+1} = x_{-n+1}, \ldots, X_n = x_n) = \alpha_{x_{-n}} p_{x_{-n}, x_{-n+1}} \ldots p_{x_{n-1}, x_n}$ *für alle* $n \geq 1, x_{-n}, \ldots, x_n \in E$.

Sei μ *ein Maß auf* $\mathcal{S}$ *mit*

$$\mu(\{x \in S, (x_{-n}, \ldots, x_n) = (a_{-n}, \ldots, a_n) = a\}, a \in E^{2n+1}\}) = \mathbb{P}(X_{-n} = a_{-n}, \ldots, X_n = a_n).$$

Das so definierte Maß μ *auf* $\mathcal{S}$ *ist eindeutig bestimmt und wird Verteilung der Markow-Kette* X *genannt.*
Eine Markow-Kette ist also eine zufällige Folge mit Werten in E*. Wir bezeichnen diese zufällige Folge mit* $X = \{\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots\}$*. Eine Markow-Kette* X *heißt irreduzibel, wenn für alle* $x, y \in E$ *ein* $n \geq 0$ *existiert, so dass es eine Folge* $x = x_0 = \ldots = x_n = y, x_0, \ldots, x_n \in E$ *gibt mit* $p_{x_i, x_{i+1}} > 0$ *für alle* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$*. Eine Markow-Kette heißt aperiodisch, wenn für alle* $x \in E$ *gilt, dass* $\mathrm{ggT}(\{n, \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x)\}) = 1$*. Wir betrachten ab jetzt den kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum* $(S, \mathcal{S}, \mu)$*.*
Ferner heißt eine Markow-Kette stationär, wenn $\alpha_i = \alpha_j$ *für alle* $i, j \in \mathbb{Z}$ *gilt. In diesem Fall nennen wir* α_0 *die stationäre eindimensionale Rand-Verteilung der Markow-Kette.*
Sei X *eine stationäre Markow-Kette mit Zustandsraum* E*, mit stationärer eindimensionaler Rand-Verteilung* α_0 *und Übergangsmatrix* P *und seien* $x, y \in E$ *beliebig. Bezeichne* $P^{(n)} = (p^{(n)}_{x,y})_{x,y \in E}$ *mit* $P^{(n)} = P^n$ *für alle* $n \geq 1$*. Ist* X *irreduzibel und aperiodisch, so gilt:*

($\star$) $\lim_{n \to \infty} p^{(n)}_{x,y} = \alpha_{0,y}$ *für alle* $x \in E$.