Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 11

Präsentation in der Übung am 08.07.15

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zwei dynamische Systeme $\mathbb{A} = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ und $\mathbb{B} = (\Omega', \mathcal{F}', P', \mathbf{T}')$ über ein und derselben Gruppe G heißen isomorph, wenn es zwischen den Wahrscheinlichkeitsräumen eine messbare Bijektion $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ gibt, sodass

$$P' = P \circ \phi^{-1} \text{ und } \phi \circ \mathbf{T}_x \circ \phi^{-1} = \mathbf{T}'_x$$

für alle $x \in G$ gilt. Zeige, dass im Falle der Isomorphie $\mathbb{A}$ genau dann ergodisch ist, wenn $\mathbb{B}$ ergodisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ein dynamisches System über einer Gruppe G und $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Zeige, dass

$$\int_\Omega X(\omega) P(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega X(\mathbf{T}_x \omega) P(\mathrm{d}\omega)$$

für alle $x \in G$ gilt.
Hinweis: Verwende algebraische Induktion.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P})$. Sei

$$A = \{\text{Es existieren } i_1, i_2, \ldots \geq 1 \text{ mit } |S_{i_2} - S_{i_1}| \geq |S_{i_3} - S_{i_2}| \geq \ldots\}.$$

Zeige $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$, wobei ohne Beweis angenommen werden darf, dass $A \in \mathcal{N}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Betrachte den kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P})$ und das Mengensystem

$$\mathcal{R} = \Big\{ \{\varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) \leq \ell_i, i = 1, \ldots, m\}, m \geq 1, B_i \in \mathcal{Q}^d, k_i, \ell_i \in \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\} \Big\},$$

wobei $\mathcal{Q}^d$ die Familie der beschränkten halb-offenen Quader in $\mathbb{R}^d$ ist. Zeige, dass $\mathcal{R}$ ein Halbring ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^2$ mit Intensität $\lambda > 0$. Betrachte den Gauß-Poisson-Prozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Primärprozess $\{S_n, n \geq 1\}$ und Sekundärprozessen $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}, \{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}, \ldots$ mit $N_B^{(1)} = \delta_o(B) + \delta_{(0,1)^\top}(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Sei $A_r = \{N_{B(o,r)} \geq 2\}$ für jedes $r \geq 0$. Zeige

$$P_N^0(A_r) = \begin{cases} 1 - \exp(2\lambda r^2 \pi) & , 0 \leq r \leq 1/2 \\ 1 - \exp\left(-\lambda\left(2r^2\pi - 2r^2 \arccos\left(\frac{1}{2r}\right) + \frac{\sqrt{4r^2-1}}{2}\right)\right) & , 1/2 < r < 1 \\ 1 & , r \geq 1. \end{cases}$$