Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 1

Abgabe am 22.04.15 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1

Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jede beschränkte Borelmenge $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$ einer Multinomialverteilung genügen, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \ldots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für alle $k, k_1, \ldots, k_n \geq 0$ mit $k_1 + \ldots + k_n = k$.

Aufgabe 2

Sei im Folgenden $\lambda > 0$.

(a) Seien $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $U_1 \sim (0, 1]$. Zeige, dass die Zufallsvariablen $-\lambda^{-1} \log(U_1), -\lambda^{-1} \log(U_2), \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter λ.

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Zeige, dass die Zufallsvariable

$$Y = \max\{k \geq 0 : X_1 + \ldots + X_k \leq 1\}$$

Poisson-verteilt ist mit Parameter λ.

Aufgabe 3

Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ, wobei $\mu(B) = 20 \cdot \nu_2(B \cap D)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Hier bezeichnet $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ den geschlossenen Einheitskreis. Schreibe ein Programm (mit R oder Matlab), das Realisierungen von N erzeugt. Die Poisson-verteilten Pseudozufallszahlen sollen dabei mit dem aus Aufgabe 2 resultierenden Algorithmus erzeugt werden. Für die Simulation von gleichverteilten Pseudozufallszahlen können die bereits implementierten Algorithmen der entsprechenden Programmiersprachen verwendet werden. Visualisiere eine Realisierung des Prozesses.

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{N}$ die Familie aller lokal endlichen Zählmaße und $\mathcal{N}$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{N}$, so dass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jede beschränkte Borelmenge $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung ist, d.h.

$$\mathcal{N} = \sigma(\{\{N \in \mathbb{N}, N_B = m\}, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), m \geq 0\}).$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $N_{\{x\}} \leq 1$.

(a) Bezeichne $\mathbb{Z}_n^d = 2^{1-n}\mathbb{Z}^d = \{2^{1-n}z, z \in \mathbb{Z}^d\}$. Definiere für beliebige $n \geq 1$ und $z \in \mathbb{Z}^d$ die Menge $A_{z,n} = (-2^{-n}, 2^{-n}]^d + z$. Ferner definiere eine Folge von Partitionen $\{\mathcal{P}_n, n \geq 1\}$ des $\mathbb{R}^d$ durch $\mathcal{P}_n = \{A_{z,n}, z \in \mathbb{Z}_n^d\}$. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$ ein n_0 existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ folgendes gilt: Es existieren disjunkte Mengen $M_1, M_2 \in \mathcal{P}_n$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$.

(b) Sei $\mathcal{E} = \{\{N \in \mathbb{N}, N_B = 0\}, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)\}$. Zeige $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$.

(c) Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß. Die Verteilung von N, bezeichnet mit P_N, ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$. Zeige, dass P_N eindeutig durch die Familie der Wahrscheinlichkeiten $\{P_N(E), E \in \mathcal{E}\}$ bestimmt ist.