Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 8

Präsentation in der Übung am 17.06.15

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Betrachte einen Poissonschen Clusterprozess in $\mathbb{R}^d$, wobei der Primärprozess $\{S_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda_0 > 0$ ist. Die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \ldots$ sind gegeben durch $N_B^{(n)} = \delta_o(B) + \delta_{S^{(n)}}(B)$ für jedes $n \geq 1$ und für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, wobei $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ ist mit $\mathbb{P}(S^{(1)} = o) = 0$ und mit $\mathbb{P}(S^{(1)} \neq \infty) = p$ für $p \in [0,1]$. Ferner sei $P_S : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1]$ definiert durch $P_S(B) = \mathbb{P}(S^{(1)} \in B \mid S^{(1)} \neq \infty)$. Solch ein Clusterprozess heißt Gauß-Poisson-Prozess. Zeige, dass das erzeugende Funktional des Gauß-Poisson-Prozesses gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left((1-p)f(x) + p\int_{\mathbb{R}^d} f(x)f(x+y)P_S(\mathrm{d}y) - 1\right)\mathrm{d}x\right)$$

für alle $f \in \mathcal{H}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Clusterprozess, wobei der Primärprozess das Intensitätsmaß $\{\mu^{(0)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ hat. Die Sekundärprozesse werden mit $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \ldots$ bezeichnet. Es gelte ferner $\mathbb{P}(N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} = 0) > 0$. Zeige

$$\mathbb{P}(N_B = 0) \geq \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}(N_{B-x}^{(1)} = 0)\mu^{(0)}(\mathrm{d}x)\right)$$

für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Poissonscher Clusterprozess in $\mathbb{R}^d$, dessen Sekundärprozesse mit $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \ldots$ bezeichnet werden. Es existiere eine Menge $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbb{P}(N_C^{(1)} > 0) > 0$. Zeige, dass der Primärprozess stationär ist.

Aufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte)
Sei $N = \{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Poissonscher Clusterprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $N' = \{N'_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der selben Intensität λ.

(a) Zeige $\operatorname{Var} N_B \geq \operatorname{Var} N'_B$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Gelte $\operatorname{Var} N_{[-n/2,n/2]^d} = \operatorname{Var} N'_{[-n/2,n/2]^d}$ für alle $n \geq 1$. Zeige $N \stackrel{D}{=} N'$.

(c) Zeige, dass aus $\operatorname{Var} N_{[-1/2,1/2]^d} = \operatorname{Var} N'_{[-1/2,1/2]^d}$ nicht notwendigerweise folgen muss, dass N ein Poisson-Prozess ist.