Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2015

Räumliche Statistik – Übungsblatt 9

Präsentation in der Übung am 24.06.15

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\{S_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_0 > 0$. Sei $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$ eine Doppel-Folge von i.i.d. Zufallsvektoren, die von $\{S_n, n \geq 1\}$ unabhängig ist. Die Verteilung von $S_1^{(1)}$ wird mit P_S bezeichnet. Ferner sei $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ eine Folge von i.i.d Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, \ldots\}$, die von $\{S_n, n \geq 1\}$ und von $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$ unabhängig ist. Es gelte $\mathbb{E}\, T^{(1)} < \infty$. Zeige, dass das erzeugende Funktional $\mathbf{G}(f)$ des zufälligen Zählmaßes $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{T^{(n)}} \delta_{S_i^{(n)}}(B - S_n),$$

ausgewertet für beliebiges $f \in \mathcal{H}$, gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(g\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(\mathrm{d}y)\right) - 1\right) \mathrm{d}x\right),$$

wobei die erzeugende Funktion $g : [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definiert ist durch $g(z) = \mathbb{E}\, z^{T^{(1)}}$ für jedes $z \in [-1, 1]$.

Aufgabe 2 (4 + 4 + 1 + 1 + 4 Punkte)
Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Gauss-Poisson-Prozess, d.h. $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist ein Cluster-Prozess, wobei der Primärprozess $\{S_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_0 > 0$ ist und die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}, \ldots$ gegeben sind durch

$$N_B^{(n)} = \delta_o(B) + \delta_{S^{(n)}}(B)$$

für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Hierbei ist $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren mit Wertebreich $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. Vereinfachend wird im Folgenden angenommen, dass $\mathbb{P}(S^{(1)} \neq \infty) = 1$.

(a) Sei $W \in B_0(\mathbb{R}^d)$ beliebig. Zeige, dass

$$\mathrm{Var}\, N_W = 2\lambda_0 \left(\nu_d(W) + \mathbb{E}\, \nu_d(W \cap (W - S^{(1)}))\right).$$

Betrachte den Schätzer

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)}$$

für $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W) > 0$.

(b) Sei $W_1, W_2, \ldots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W_n) < \infty$ für jedes $n \geq 1$. Es gelte zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Verwende Theorem 3.16, um zu zeigen, dass folgender zentraler Grenzwertsatz gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{\operatorname{Var} \widehat{\lambda}_{W_n}}}(\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(c) Sei $W_n = [-n/2, n/2]^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Zeige $\lim_{n\to\infty} \nu_d(W_n \cap (W_n - x))/\nu_d(W_n) = 1$.

Sei nun $d = 2$ und $S^{(1)} \sim \mathrm{U}([0,1]^2)$ gleichverteilt im 2-dimensionalen Einheitswürfel. Sei $\lambda_0 = 1/10$.

(d) Berechne $\operatorname{Var} \widehat{\lambda}_{W_n}$.

(e) Schreibe ein Progamm mit R oder Matlab, das den Gauss-Poisson-Prozess in $W_n = [-n/2, n/2]^2$ simuliert. Simuliere für $n \in \{3, 5, 7, 10, 50, 150\}$ jeweils 1000 Realisierungen und plotte die Histogramme für die jeweiligen Zufallsvariablen $(\operatorname{Var} \widehat{\lambda}_{W_n})^{-1/2}(\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein gemischter Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$, d.h. ein Cox-Prozess mit zufälligem Intensitätsfeld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ mit $\lambda_x = Z$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, wobei Z eine nicht-negative, integrierbare Zufallsvariable ist. Zeige, dass $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ genau dann ergodisch ist, wenn Z f.s. konstant ist.