ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
18. Juni 2015

Stochastik I - Übungsblatt 10

Abgabe: Dienstag, 23. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 3 + 2 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Exp(\lambda)$. Durch $\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n^{-1}$ sei ein M-Schätzer für λ gegeben.

(a) Schreibe eine **R**-Funktion, welche die Bootstrap-Schätzer (Regeln i) und ii) im Skript) für den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{\lambda}$ berechnet. Als Eingabe soll die Methode eine Stichprobe `x` und die Anzahl `M` der Samples, die gebildet werden sollen, bekommen.

(b) Simuliere nun jeweils 100 $Exp(3)$-verteilte Stichproben der Länge $n \in \{5, 10, 20\}$ und bestimme für jede der Stichproben die Schätzer aus (a). Verwende dazu jeweils 100 Samples (`M`=100).

(c) Verwende die Stichproben aus (b), um für jedes $n \in \{5, 10, 20\}$ jeweils den mittleren quadratischen Abstand zu den entsprechenden theoretischen Größen (d.h. $\mathbb{E}(\hat{\lambda})$ und $Var(\hat{\lambda})$) zu schätzen.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Poi(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Es soll ein Bayes-Schätzer für λ, falls die Dichte q der a-priori Verteilung von λ durch $q(\lambda) = e^{-\lambda}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\lambda)$ gegeben ist, bestimmt werden.

(a) Zeige, dass für die a-posteriori Dichte $q^*(\lambda)$ gilt

$$q^*(\lambda) = \frac{\lambda^{n\bar{x}_n} e^{-(n+1)\lambda}(1+n)^{1+n\bar{x}_n}}{\Gamma(1+n\bar{x}_n)}.$$

(b) Bestimme den Bayes-Schätzer von λ, für die quadratische Verlustfunktion.

Aufgabe 3 (5 + 2 + 3 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim Exp(\mu)$, λ, $\mu > 0$. Allerdings sei es nicht möglich, X und Y direkt zu beobachten. Stattdessen werden

$$Z = \min\{X, Y\} \quad \text{und} \quad W = \begin{cases} 1 & ;\ Z = X \\ 0 & ;\ Z = Y \text{ (und } Z \neq X \text{)} \end{cases}$$

beobachtet.

(a) Zeige, dass Z und W unabhängig sind.

(b) Wie lauten die (Zähl-) Dichten von Z und W?

(c) Gegeben sei eine Stichprobe $(Z_1, W_1), \ldots, (Z_n, W_n)$[1] vom Umfang n. Wie lautet der ML-Schätzer[2] von λ und μ?

[1] Die Likelihood-Funktion dieser Stichprobe ist definiert als das Produkt der Likelihood-Funktionen der Stichproben $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$.
[2] Der Schätzer existiert nur, falls $W_1, \ldots, W_n$ nicht alle den gleichen Wert haben.

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 Punkte)

Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe von unabhängigen $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen, wobei $\lambda > 0$ und $n \geq 2$. Ferner sei $\hat{\lambda} = c_n/\bar{X}_n$ ein Schätzer für λ.

(a) Bestimme c_n so, dass $\hat{\lambda}$ erwartungstreu ist.

(b) Berechne die Schranke für die Varianz von $\hat{\lambda}$ aus dem Satz von Cramér-Rao.

(c) Überprüfe bei allen Voraussetzungen für den Satz von Cramér-Rao, ob $\hat{\lambda}$ sie erfüllt.