ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2015
9. Juni 2015

Stochastik I - Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 16. Juni vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die i.i.d. Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ beschreiben die Restlebensdauer von n Patienten, die unter einer bestimmten Krankheit leiden. Aus Erfahrung wird angenommen, das die X_i Rayleigh-verteilt sind mit Dichte

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},\ \theta > 0.$$

Geschätzt werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient eine Restlebensdauer von mindestens t Jahren besitzt. Finde den Maximum-Likelihood-Schätzer[1] für $\bar{F}_{X_1}(t) = P(X_1 > t)$, $t > 0$.

Aufgabe 2 (4 + 1 Punkte)

Die erwartete tägliche Kursänderung einer Aktie eines Handelsunternehmens innerhalb eines bestimmten Zeitraumes soll geschätzt werden. Dazu werden an n zufällig ausgewählten Tagen die Kursänderungen $x_1, \dots, x_n$ bestimmt. Die Kursänderungen seien Realisierungen der Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ mit $X_i \sim N(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Aufgrund von Erfahrungen mit vergleichbaren Wertpapieren wurden Vorkenntnisse über die tägliche mittlere Kursänderung μ gewonnen, die sich mit Hilfe einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariable $\tilde{\mu}$ modellieren lässt.

(a) Zeige, dass die a-posteriori-Dichte $q^* : \Theta \to [0,\infty)$ von $\tilde{\mu}$ gegeben ist durch

$$q^*(\mu) = f_{\tilde{\mu}|\bar{X}_n = x}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)^{-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\mu^2 - \frac{2n}{n+1}x\mu + \left(\frac{n}{n+1}x\right)^2\right)\right\}$$

(b) Bestimme den Bayes-Schätzer $\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n)$ des unbekannten Parameters $\mu \in \mathbb{R}$ für die quadratische Verlustfunktion $V : \Theta^2 \to [0,\infty)$, $V(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)^2$.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 2 Punkte)

Bestimme für die folgenden parametrischen Familien von Verteilungen die Kullback-Leibler Information $H(P_\theta, P_{\theta'})$.

(a) Gleichverteilung: $\{U(0,\theta),\ \theta > 0\}$

(b) Normalverteilung: $\{N(\mu,\sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt sei

(c) Exponentialverteilung: $\{Exp(\lambda),\ \lambda > 0\}$

Aufgabe 4 (2 + 4 + 1 Punkte)

Es sei $X_1, \dots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} Ber(p)$ eine Stichprobe mit $p \in [0,1]$.

(a) Zeige, dass der ML-Schätzer für p^2 verzerrt ist (zur Erinnerung: der ML-Schätzer für p ist $\bar{X}_n$).

(b) Leite basierend auf dem ML-Schätzer den Bias-korrigierten Jackknife-Schätzer her.

(c) Zeige, dass der Bias-korrigierte Jackknife-Schätzer p^2 erwartungstreu schätzt.

[1] Es darf ohne Beweis verwendet werden: Sei $\hat{\theta}_n$ der ML-Schätzer für θ, g eine streng monotone Funktion auf Θ und $\tau = g(\theta)$. Dann ist $\hat{\tau}_n = g(\hat{\theta}_n)$ der ML-Schätzer für τ.