Stochastik I - Hinweis zu Übungsblatt 12

In **Aufgabe 1** genügt es die existenz einer messbaren und bzgl. P_Y integrierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeigen, für die gilt

$$\int\limits_{Y^{-1}(B)} X(\omega)P(d\omega) = \int\limits_{B} g(y)P_Y(dy),$$

für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wobei mit P_Y die Verteilung von Y bezeichnet sei. Dann ist $\mathbb{E}(X|Y = y) = g(y)$, für alle $y \in \mathbb{R}$. Dabei ist zu beachten:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Y^{-1}(B)} X(\omega)P(d\omega) &= \int\limits_{\Omega} X(\omega)\mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}(\omega)P(d\omega) \\
&= \int\limits_{\Omega} X(\omega)\mathbb{1}_{B}(Y(\omega))P(d\omega) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\mathbb{1}_{B}(y)P_{X,Y}(d(x,y)) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}\times B} xP_{X,Y}(d(x,y)),
\end{aligned}$$

wobei $P_{X,Y}$ die gemeinsame Verteilung von X und Y bezeichne.