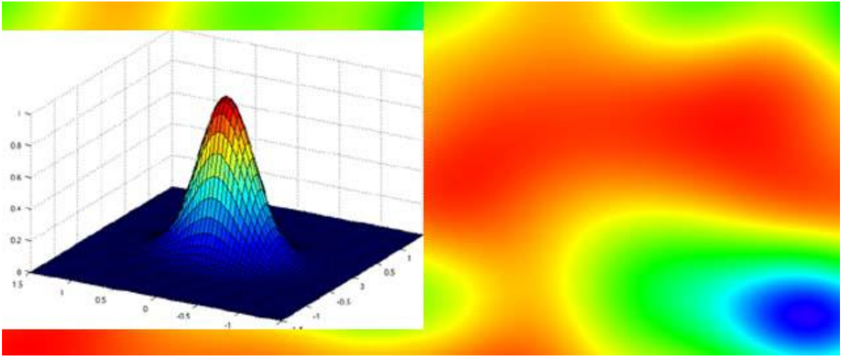

Gleichmäßige Berry-Esseen Schranken

Seminar zur Methode von Stein

Universität Ulm

Stefan Roth | Institut für Stochastik | 18. April, 2016

Inhalt

Wiederholung

$h \in \mathcal{H}$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, W Zufallsvariable.

- Stein-Gleichung: $h(w) - \mathbb{E}\, h(Z) = f_h'(w) - wf_h(w)$
- $\sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}\, h(W) - \mathbb{E}\, h(Z)| = \sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}[f_h'(W) - Wf_h(W)]|$
- Theorem 3.1: Falls es ein δ gibt, so, dass für jede gleichmäßige Lipschitzfunktion h

  $$|\mathbb{E}\, h(W) - \mathbb{E}\, h(Z)| \leq \delta ||h'||,$$

  so gilt

  $$d_W(\mathcal{L}(W), \mathcal{N}(0,1)) := \sup_{h\in Lip(1)} |\mathbb{E}\, h(W) - \mathbb{E}\, h(Z)| \leq \delta$$

  $$d_K(\mathcal{L}(W), \mathcal{N}(0,1)) := \sup_{z\in\mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 2\delta^{1/2}$$

Voraussetzungen und Notation

Setting:

- $\xi_1, \dots, \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen
- $\mathbb{E}\,\xi_i = 0$, $1 \leq i \leq n$
- $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,\xi_i^2 = 1$

Notation:

- $f_z := f_h$ für $h = \mathbb{1}_{(-\infty,z]}$, $z \in \mathbb{R}$
- $W = \sum_{i=1}^n \xi_i$
- $W^{(i)} = W - \xi_i$
- $K_i(t) = \mathbb{E}\left[\xi_i \left(\mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i \leq t < 0\}}\right)\right]$

Berry-Esseen für beschränkte Zufallsvariablen

Theorem 1: Falls $|\xi_i| \leq \delta_0$, $1 \leq i \leq n$, so gilt

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 3.3\ \delta_0$$

Bemerkung: Sind $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $|X_i| \leq C$, $1 \leq i \leq n$, so folgt aus dem Theorem mit $\xi_i = (X_i - \mu)/(\sigma\sqrt{n})$

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 3.3\ \frac{C + |\mu|}{\sigma\sqrt{n}},$$

wobei $\mu = \mathbb{E}\, X_1$ und $\sigma^2 = Var(X_1)$.

Zur Erinnerung:

- $\mathbb{E}\left[Wf_z(W)\right] = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left[f_z'(W^{(i)} + t)\right] K_i(t)dt$
- $\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\xi_i^2 = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|\xi_i|^3$
- $u, v, w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &|(w+u)f_z(w+u) - (w+v)f_z(w+v)| \\ \le\ &(|w| + \sqrt{2\pi}/4)(|u| + |v|) \end{aligned}$$

Beweis der Ungleichung von Folie 4:

$$
\begin{aligned}
&|(w+u)f_z(w+u)-(w+v)f_z(w+v)| \\
\leq &|uf_z(w+u)-vf_z(w+v)|+|w||f_z(w+u)-f_z(w+v)| \\
\leq &|f_z(w+u)|(|u|+|v|)+|w||f_z(w+u)-f_z(w+v)|
\end{aligned}
$$

Mit Taylerreihenentwicklung von f_z folgt

$$
\begin{aligned}
|f_z(w+u)-f_z(w+v)| &= |f_z'(\xi)u-f_z'(\eta)v| \\
&\leq |f_z'(\xi)||u|+|f_z'(\eta)||v|
\end{aligned}
$$

Wegen $|f_z(x)| \leq 1$ und $|f_z'(x)| \leq \sqrt{2\pi}/4$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ also

$$
\begin{aligned}
&|(w+u)f_z(w+u)-(w+v)f_z(w+v)| \\
\leq &(|w|+\sqrt{2\pi}/4)(|u|+|v|).
\end{aligned}
$$

Verallgemeinerung von Theorem 1: Es sei W eine (beliebige) reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|W| \leq 1$. Falls es Zufallsvariablen R_1, R_2 und $M(t) \geq 0$ und Konstanten δ_0, δ_1 und δ_2 gibt, die nicht von z abhängen, so dass

$$\int_{|t|\leq\delta_0} M(t)dt = 1, \quad |R_1| \leq \delta_1, \quad |\mathbb{E}\, R_2| \leq \delta_2$$

und

$$\mathbb{E}\left[Wf_z(W)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{|t|\leq\delta_0} f_z'(W + R_1 + t)M(t)dt\right] + \mathbb{E}\, R_2,$$

dann gilt

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 2.1\ (\delta_0 + \delta_1) + \delta_2$$

Bemerkung: Es sei nun wieder $W = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Weiterhin sei I eine Zufallsvariable mit $P(I = i) = \mathbb{E}\, \xi_i^2$, unabhängig von $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Wf_z(W)\right] &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left[f_z'(W^{(i)} + t)\right] K_i(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\int_{|t|\le\delta_0} f_z'(W^{(i)} + t)\frac{K_i(t)}{\mathbb{E}\,\xi_i^2}dt\right] \mathbb{E}\,\xi_i^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{|t|\le\delta_0} f_z'(W^{(I)} + t)\widetilde{K}_I(t)dt\right],
\end{aligned}
$$

wobei $\widetilde{K}_i(t) = K_i(t)/\,\mathbb{E}\,\xi_i^2$.

Damit gilt also

$$\mathbb{E}\left[Wf_z(W)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{|t|\leq\delta_0} f_z'(W + W^{(I)} - W + t)\widetilde{K}_I(t)dt\right]$$

Wähle

- $R_1 = W^{(I)} - W = -\xi_I$
- $R_2 = 0$
- $M(t) = \widetilde{K}_I(t)$

Dann folgt mit $\delta_0 \geq |\xi_i|$, $1 \leq i \leq n$, $\delta_2 = 0$ und $\delta_1 = \delta_0$

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 4.2\ \delta_0$$

Berry-Esseen für unabhängige Zufallsvariablen

Von nun an:

- $\mathbb{E}\,|\xi_i|^3 < \infty$, $1 \le i \le n$ (statt ξ_i beschränkt)
- $\gamma = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|\xi_i|^3$

Im Beweis von Theorem 1:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} P(W^{(i)} + t \le z) K_i(t) dt - \phi(z) \right| \le \frac{3}{2}(1+\sqrt{2\pi}/4)\gamma$$

Schlüsselargument:

Ersetze $P(W^{(i)} + t \le z)$ durch $P(W \le z)$

Proposition: Es gilt

$$P(a \leq W^{(i)} \leq b) \leq \sqrt{2}(b-a) + (1+\sqrt{2})\gamma$$

für beliebige reelle $a < b$ und jedes $1 \leq i \leq n$.

Theorem 2: Es gilt

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 7\gamma$$

Bemerkung: Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $\mathbb{E}\,|X_1|^3 < \infty$. Dann gilt mit $\xi_i := (X_i - \mu)/(\sigma\sqrt{n})$

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |P(W \leq z) - \phi(z)| \leq 7\,\frac{\mathbb{E}\,|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

wobei $\mu = \mathbb{E}\,X_1$ und $\sigma^2 = Var(X_1)$

Beweis von Theorem 2:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} P(W^{(i)} + t \le z)K_i(t)dt - P(W \le z)\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} \left|P(W^{(i)} + t \le z) - P(W \le z)\right| K_i(t)dt$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} P(z - \max\{t, \xi_i\} \le W^{(i)} \le z - \min\{t, \xi_i\})K_i(t)dt$$

Nun gilt mit der Proposition

$$P(z - \max\{t, \xi_i\} \le W^{(i)} \le z - \min\{t, \xi_i\})$$
$$= \mathbb{E}\left[P(z - \max\{t, \xi_i\} \le W^{(i)} \le z - \min\{t, \xi_i\} | \xi_i)\right]$$
$$\le \mathbb{E}\left[\sqrt{2}(|t| + |\xi_i|) + (1 + \sqrt{2})\gamma\right]$$

Damit also

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} P(W^{(i)}+t\le z)K_i(t)dt - P(W\le z)\right| \\
\le&\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sqrt{2}(|t|+|\xi_i|)+(1+\sqrt{2})\gamma\right]K_i(t)dt \\
=&(1+\sqrt{2})\gamma+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}\,|\xi_i|^3+\mathbb{E}\,|\xi_i|\,\mathbb{E}\,\xi_i^2\right) \\
\le&(1+2.5\sqrt{2})\gamma
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung von

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} P(W^{(i)} + t \leq z)K_i(t)dt - \phi(z)\right| \leq \frac{3}{2}(1+\sqrt{2\pi}/4)\gamma$$

führt dies zu

$$\begin{aligned}|P(W \leq z) - \phi(z)| &\leq \left[(1 + 2.5\sqrt{2}) + \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2\pi}/4)\right]\gamma \\ &\leq 7\gamma\end{aligned}$$

$\square$

Kommutative Paare (Exchangeable pairs)

Seien W und W' zwei reellwertige Zufallsvariablen auf ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum.

- Das Paar (W, W') heißt kommutativ, falls
$$(W, W') \stackrel{d}{=} (W', W)$$
- Eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt antisymmetrisch, falls
$$g(x, y) = -g(y, x),$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Für ein kommutatives Paar gilt:
$$\mathbb{E}\, g(W, W') = 0,$$
für jede antisymmetrische Funktion g.

Im folgenden sei (W, W') ein kommutatives Paar.

Lemma: Falls

$$\mathbb{E}(W'|W) = (1-\lambda)W,$$

für ein $0 < \lambda < 1$, so gilt:

- $\mathbb{E}\, W = 0, \quad \mathbb{E}(W - W')^2 = 2\lambda\, \mathbb{E}\, W^2$
- Für jede stückweise stetige Funktion f mit $|f(w)| \leq C(1 + |w|)$ ist

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\left[(W - W')(f(W) - f(W'))\right]$$

Beweis: Sei $g(x, y) = (x - y)(f(x) + f(y))$. Dann existiert $\mathbb{E}\, g(W, W')$ und es gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}[(W - W')(f(W') + f(W))] \\
&= \mathbb{E}[(W - W')(f(W') - f(W))] + 2\,\mathbb{E}[f(W)(W - W')] \\
&= \mathbb{E}[(W - W')(f(W') - f(W))] + 2\,\mathbb{E}[f(W)\,\mathbb{E}[(W - W')|W]] \\
&= \mathbb{E}[(W - W')(f(W') - f(W))] + 2\lambda\,\mathbb{E}[Wf(W)]
\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 3: Ist (W, W') ein kommutatives Paar und

$$\mathbb{E}(W'|W) = (1-\lambda)W,$$

so gilt Theorem 3.1 mit

$$\delta = 4\,\mathbb{E}\left|1 - \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\left[(W'-W)^2|W\right]\right| + \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\,|W-W'|^3$$

Bemerkung: Es gilt:

$$\mathbb{E}\left\{1 - \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\left[(W'-W)^2|W\right]\right\} = 1 - \mathbb{E}\,W^2$$

Literatur

[1] A.D. Barbour, Louis H. Y. Chen. *An Introduction to Stein's Method.* Singapore University Press, Singapore, 2005 (pp. 23-39).

[2] I. Nourdin, G. Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus - From Stein's Method to Universality.* Cambridge University Press, New York, 2012 .