2. Übungsblatt
Abgabe: 12. Mai, 8:30

Aufgabe 1: Abgeschlossene Konvergenz
(2+2+2=6 Punkte)

a) Zeige, dass die Abbildung

$$B : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathcal{F},\ (x,r) \mapsto \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-x\| \le r\},$$

die (x,r) auf die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r abbildet, stetig ist.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge

$$F_j := B(0,1) \cup B(v_j,1), \quad j \in \mathbb{N},$$

wobei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $\lim_{j\to\infty} \|v_j\| = \infty$ ist.

c) Zeige, dass die Funktion

$$f : E^n \to \mathcal{F},\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto \{x_1,\dots,x_n\}$$

stetig ist.

Aufgabe 2: Eine Semimetrik der abgeschlossenen Konvergenz
(1+5+1=7 Punkte)

Auf dem letzten Blatt haben wir eine Semimetrik $d^! : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ für die abgeschlossene Konvergenz konstruiert. Wir haben aber noch nicht gezeigt, dass für eine Folge $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ und $F \in \mathcal{F}$ tatsächlich

$$\lim_{j\to\infty} F_j = F \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{j\to\infty} d^!(F_j,F) = 0$$

gilt.

a) Man zeige: Wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $F \cap C_n \subseteq (F_j)_{\oplus\epsilon}$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$ nicht gilt, dann konvergiert $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in der abgeschlossenen Konvergenz nicht gegen F.

b) Man zeige:

$$\lim_{j\to\infty} F_j = F \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{j\to\infty} d_n(F_j,F) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Man zeige:

$$\lim_{j\to\infty} d_n(F_j,F) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{j\to\infty} d^!(F_j,F) = 0.$$