ulm university universität uulm

5. Übungsblatt
Abgabe: 28. Juni, 16:15

Aufgabe 1: Das Intensitätsmaß
(3+3=6 Punkte)

a) Sei Λ das Maß auf $E = [0,2] \times [0,2]$ mit Lebesgue-Dichte $f(x,y) = \pi xy$. Gib einen Punktprozess X auf E mit Intensitätsmaß Λ an. Konstruiere den Punktprozess explizit und verweis nicht darauf, dass es einen Poissonprozess mit diesem Intensitätsmaß gibt.

b) Beweise den Satz von Campbell:
Sei X ein Punktprozess in E mit Markenraum M und Λ das Intensitätsmaß von X. Dann gilt

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{(x,m)\in X} f(x,m)\Big] = \int_{E\times M} f(x,m)\,\Lambda(d(x,m))$$

für jede messbare Funktion $f : E \times M \to [0,\infty)$. (Die linke Seite ist genau dann unendlich, wenn die rechte unendlich ist.)

Aufgabe 2: Der Abstand zum nächsten Nachbarn als Beispiel einer typischen Marke
(1+2+1+2+1=7 Punkte)

Sei X ein stationärer Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität 1. Bestimme die Verteilungsfunktion des Abstandes eines Punktes $x \in X$ zu seinem nächsten Nachbarn, d.h. zum nächstgelegenen Punkt in $X \setminus \{x\}$.
Aber wie ist diese Verteilungsfunktion definiert? Wenn wir nur einen Punkt x des Poissonprozesses gemäß einer Regel auswählen, wird die Verteilungsfunktion von dieser Regel abhängen. Den Durchschnitt über alle Punkte des Poissonprozess können wir nicht bilden, da dies f.s. abzählbar unendlich viele sind. Die Lösung bietet folgender Ansatz:
Es bezeichne

$$d(A,x) := \inf\{\|y-x\| \mid y \in A\}$$

den Abstand von $x \in \mathbb{R}^d$ zu einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Betrachte den markierten Punktprozess

$$Y := \{\big(x, d(X\setminus\{x\}, x)\big) \mid x \in X\},$$

bei dem jedem Punkt von X der Abstand zu seinem nächsten Nachbarn als Marke hinzugefügt wird. *Verwende ohne Beweis, dass Y tatsächlich ein markierter Punktprozess ist.*

a) Zeige, dass Y stationär ist.

Wir definieren nun die gesuchte Verteilung als Markenverteilung $\mathbb{Q}$ von Y.

b) Sei $\epsilon > 0, r > 2\epsilon$. Zeige, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\#(X\cap B_\epsilon(0)) = 1, \#(X\cap B_{r+\epsilon}(0)) = 1\big) &\le \mathbb{E}\big[\#\{(x,m)\in X \mid \|x\| < \epsilon, m > r\}\big]\\ &\le \mathbb{P}\big(\#(X\cap B_\epsilon(0)) = 1, \#(X\cap B_{r-\epsilon}(0)) = 1\big).\end{aligned}$$

c) Sei $\epsilon > 0, \gamma > \epsilon$. Es sei $\kappa_d := \lambda_d(B_1(0))$ das Lebesgue-Maß des Euklidischen Einheitsball. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\big(\#(X\cap B_\epsilon(0)) = 1, \#(X\cap B_\gamma(0)) = 1\big) = \kappa_d \epsilon^d e^{-\kappa_d \gamma^d}.$$

d) Zeige, dass Y Intensität 1 hat und die Verteilungsfunktion der typischen Marke von Y gegeben ist durch

$$F(r) := \mathbb{Q}((0,r]) = 1 - e^{-\kappa_d r^d}.$$

e) Ist Y ein Poissonprozess?