Stochastische Geometrie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2016

6. Übungsblatt
Abgabe: 12. Juli, 16:15

Aufgabe 1: Das Kapazitätsfunktional von Booleschen Modellen
(3 Punkte)

Sei Z ein stationäres Boolesches Modell in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma > 0$ und Kornverteilung $\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$T_Z(C) = 1 - \exp\left(-\gamma \int_{\mathcal{C}_0} \lambda_d(A + C^*)\mathbb{Q}(dA)\right), \ \ C \in \mathcal{C}.$$

Aufgabe 2: Unbegrenzt teilbare zufällige abgeschlossene Mengen
(3 Punkte)

Eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ heißt *unbegrenzt teilbar*, falls es für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ zufällige abgeschlossene Mengen $Z_1, \ldots, Z_m$ in $\mathbb{R}^d$ gibt mit

$$Z \stackrel{d}{=} \bigcup_{i=1}^{m} Z_i.$$

Zeige, dass stationäre Boolesche Modelle unbegrenzt teilbar sind.

Aufgabe 3: Lokal-Endlichkeit bei unabhängiger Markierung
(4 Punkte)

Betrachte einen Punktprozess $\tilde{X}^0 = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ in $\mathbb{R}^d$ und eine von $\tilde{X}^0$ unabhängige Folge von u.i.v. zufälligen kompakten Mengen $Z_1, Z_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^d$. Setze $\tilde{X} = \{(\xi_1, Z_1), (\xi_2, Z_2), \ldots\}$. Man zeige, dass die Bedingung

(A) Fast sicher schneidet jede kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ nur endlich viele Körner $Z_i + \xi_i$

äquivalent ist zu

$$\mathbb{P}\big(\sum_{y \in \tilde{X}_0} T_{Z_1}(K - y) < \infty \text{ für alle } K \in \mathcal{C}\big) = 1.$$

Hinweise:

(i) Man kann annehmen, dass der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum von der Form $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$ *ist und* X^0 *auf* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ *definiert ist, während* $Z_1, Z_2, \ldots$ *auf* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ *definiert sind.*

(ii) Wende für festes $\omega_1 \in \Omega_1$ *den Satz von Borel-Cantelli in* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ *an.*