Stochastik I – Blatt 10

A1

(a) Normalverteilung: Test des Erwartungswerts μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$, nämlich $\sigma = 0.01$.

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 = \mu \neq 0.$$

Testgröße $T(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma}$, $\alpha = 0.05$.

H_0 wird verworfen, wenn

$$|T(x_1, \dots, x_n)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96.$$

Hier: $\bar{x}_n = -0.005538462$, $n = 13$

$$\Rightarrow \quad |T(x_1, \dots, x_n)| = \left| \sqrt{13} \cdot \frac{\bar{x}_n}{0.01} \right| = |-2.00| > 1.96.$$

$\Rightarrow$ H_0 wird verworfen.

(b) Sei $\mu_1 = -0.008$. Dann ergibt sich für den Fehler 2. Art, wobei F_1 Verteilungsfunktion einer $N(\mu_1, \sigma^2)$ verteilten ZV:

$$\beta_n(F_1) = P_{F_1}\left(|T(X_1, \dots, X_n)| \leq z_{0.975} \right)$$

$$= P_{F_1}\left(-z_{0.975} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n}{\sigma} \leq z_{0.975} \right)$$

$$= P_{F_1}\left(-z_{0.975} - \sqrt{n}\,\frac{\mu_1}{\sigma} \leq \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_1}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq z_{0.975} - \sqrt{n}\,\frac{\mu_1}{\sigma} \right)$$

$$= \Phi\left(z_{0.975} - \sqrt{13}\,\frac{-0.008}{0.01} \right) - \Phi\left(-z_{0.975} - \sqrt{13}\,\frac{-0.008}{0.01} \right)$$

$$\ldots = \Phi(4.84) - \Phi(0.92) \approx 1 - 0.82 = 0.18.$$

(c) Einseitiger Test, Niveau $\alpha = 0.05$, $H_0: \mu = 0$ vs. $H_1: \mu < 0$.

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow T(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}_n}{\sigma}.$$

$$\Rightarrow P_{H_0}\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n}{\sigma} \leq z_\alpha\right) = \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Mit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1_{(-\infty, z_\alpha]}(T(x_1, \dots, x_n))$ ist ein Test zum Niveau α, bei dem die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn $T(x_1, \dots, x_n)$ zu kleine Werte annimmt.

(d) $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu > \mu_0$. Niveau $\alpha \in (0,1)$.

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1_{(t_{n-1, 1-\alpha}, \infty)}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}}\right).$$

Hier ist $\Theta_0 = \{\mu_0\}$, $\Theta_1 = (\mu_0, \infty)$.
Sei $\mu_1 \in \Theta_1$ beliebig.

$$P_{\mu_1}\left(\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1\right) = P_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\,\frac{X_n - \mu_0}{S_n} > t_{n-1, 1-\alpha}\right)$$

$$= 1 - P_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\,\frac{X_n - \mu_0}{S_n} \leq t_{n-1, 1-\alpha}\right)$$

$$= 1 - P_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\,\frac{X_n - \mu_1}{S_n} + \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\mu_1 - \mu_0}{S_n}}_{>0 \text{ f.s.}} \leq t_{n-1, 1-\alpha}\right)$$

$$\geq 1 - P_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\,\frac{X_n - \mu_1}{S_n} \leq t_{n-1, 1-\alpha}\right) = \alpha.$$

A2: $(X_1,\dots,X_n)$ iid, $X_1 \sim Bin(1,p)$, $p \in [0,1]$, $n = 10$.

$\Theta_0 = [0, 0.6]$, $\Theta_1 = (0.6, 1]$.

$H_0: p \in \Theta_0$ vs. $H_1: p \in \Theta_1$.

$\varphi(x_1,\dots,x_n) = 1_{(0.7,1]}(\bar{x}_n)$.

a) $1_{(0.7,1]}(\bar{X}_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \leq 0.7 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \leq n \cdot 0.7$

$\Rightarrow$ Es dürfen maximal $n \cdot 0.7$ Einsen geworfen werden.

Hier: Maximal 7 da $n=10$.

b) Sei $F_{0.4}$ die Verteilungsfunktion einer $B(1, 0.4)$ verteilten ZV.

$$\alpha_n(F_{0.4}) = P_{F_{0.4}}(\varphi(X_1,\dots,X_n) = 1) = P_{F_{0.4}}(\bar{X}_n > 0.7)$$

$$\overset{n=10}{=} P_{F_{0.4}}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{10} X_i}_{Bin(10,0.4)} \in \{8,9,10\}\Big) = \sum_{i=8}^{10} 0.4^i \, 0.6^{10-i} \binom{10}{i}$$

$$= 0.0106 + 0.0016 + 0.0001 = 0.0123.$$

c) Sei $p \in \Theta_0$ beliebig und F_p Verteilungsfkt. einer $B(1,p)$ verteilten ZV.

Wie in b): $\alpha_n(F_p) = P_{F_p}(\varphi(X_1,\dots,X_n)=1) = P_{F_p}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \in \{8,9,10\}\right)$

$$= \sum_{i=8}^{10} p^i (1-p)^{10-i} \binom{10}{i} = 45p^8(1-p)^2 + 10p^9(1-p) + p^{10}.$$

$$\alpha_{10}'(p) = \frac{d}{dp}\left(45p^8(1-p)^2 + 10p^9 - 10p^{10} + p^{10}\right) =$$

$$\cancel{= \frac{d}{dp}\left(45p^8(1-p)^2 +\right.}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(45p^8 - 90p^9 + 45p^{10} + 10p^9 - 10p^{10} + p^{10}\right)$$

$$= \frac{d}{dp}\left(45p^8 - 80p^9 + 36p^{10}\right)$$

$$= 360p^7 - 720p^8 + 360p^9 = 360p^7(1-p)^2 > 0 \quad \forall p \in \Theta_0.$$

$\Rightarrow$ α_{10} monoton wachsend in p

$\Rightarrow$ α_{10} wird maximal für $p = 0.6$.

d)

$$\beta_{10}(F_{0.75}) = P_{F_{0.75}}(\varphi(X_1, \dots, X_{10}) = 0) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 7\right)$$

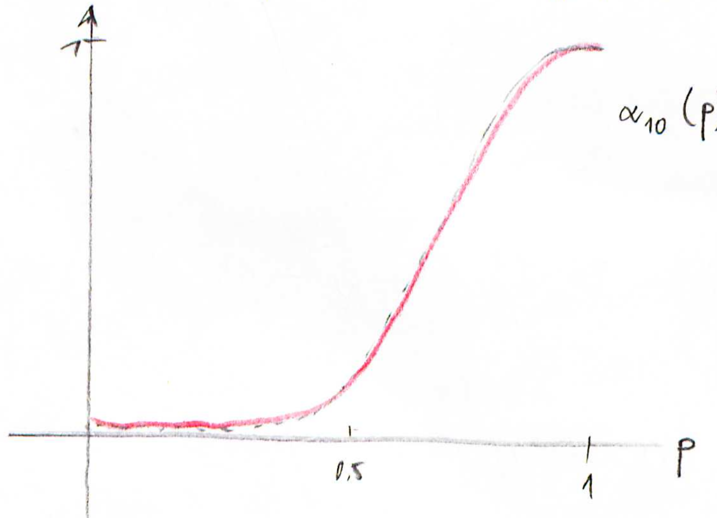
$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 8\right) = 1 - \sum_{i=8}^{10} \binom{10}{i} 0.75^i \, 0.25^{10-i}$$

$$= 1 - 0.2816 - 0.1877 - 0.0563 = 0.4744.$$

e) Gütefunktion

$$\alpha_n(p) = P_p(\varphi(X_1, \dots, X_{10}) = 1) = P_p\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 7\right)$$

$$= \cancel{1 - P_p\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)} \sum_{i=8}^{10} p^i (1-p)^{10-i} \binom{10}{i}$$



A3 $(X_1, \dots, X_n)$ iid, $X_1 \sim U(0, \theta)$, $\theta \in \Theta = (0,1)$

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1_{(\theta_0, \infty)}(\max\{X_1, \dots, X_n\}) + 1_{(-\infty, \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}]}(\max\{X_1, \dots, X_n\})$$

$H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta \neq \theta_0$.

a) $$P_{\theta_0}(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) = P_{\theta_0}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha})$$

$$\overset{X_1, \dots, X_n \text{ iid}}{=} P_{\theta_0}(\underbrace{X_1}_{\sim U(0, \theta_0)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha})^n = \left(\frac{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}{\theta_0}\right)^n = \alpha.$$

b) Sei $\theta \neq \theta_0$.

$$\alpha_n = P_\theta(\varphi(X_1, \dots, X_n) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > \theta_0) + P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha})$$

$$\geq \begin{cases} P_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} > \theta_0) = 1 - (P_\theta(X_1 \leq \theta_0))^n = 1 - \left(\frac{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}{\theta}\right)^n = 1 - \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \longrightarrow 1 \\ \text{für } \theta > \theta_0 \\ P_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}) = (P_\theta(X_1 \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}))^n = \begin{cases} \left(\frac{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}{\theta}\right), & \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} < \theta \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ \xrightarrow{n \to \infty} 1 \quad \text{für } \theta_0 > \theta. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ φ ist konsistent