Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

ulm university universität ulm

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 13

Abgabe am 12.7.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für $n \geq 2$ sei $(Y_1, \ldots, Y_n)$ eine Folge von Zufallsvariablen und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ derart, dass nicht alle x_i den gleichen Wert annehmen. Betrachte das Regressionsmodel

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad \text{für jedes } i \in \{1, \ldots, n\},$$

wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit $\varepsilon_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ für beliebiges $\sigma^2 > 0$. Seien $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$ die ML-Schätzer für α und β. Zeige, dass $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \widehat{\alpha}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \widehat{\beta}) = 0$, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

Betrachte folgende Daten

i	1	2	3	4	5
x_i	8	12	35	40	41
y_i	1.8	2.7	4.1	2.3	2.3

An die Daten soll ein lineares Regressionsmodel der Form

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad \text{für jedes } i \in \{1, \ldots, 5\}$$

angepasst werden, wobei angenommen wird, dass $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit $\varepsilon_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ für unbekanntes $\sigma^2 > 0$.

(a) Berechne die ML-Schätzwerte $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2$ für α, β, σ^2 sowie den zugehörigen Wert von $\mathrm{Cov}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$.

(b) Berechne die Verteilung von $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$ in Abhängigkeit von α und β.

(c) Berechne $\mathrm{Var}\, \widehat{\varepsilon}_i$ in Abhängigkeit von σ^2 für jedes $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

(d) Teste die Nullhypothese $H_0 : \alpha = 2.1$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \alpha \neq 2.1$ zum Niveau $1 - \gamma = 0.05$.

(e) Teste die Nullhypothese $H_0 : \beta = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \beta \neq 0$ zum Niveau $1 - \gamma = 0.05$.

(f) Teste die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 = 1$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ zum Niveau $1 - \gamma = 0.05$.