Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

# **Stochastik I** - Übungsblatt 2

Abgabe am 26.4.2016 vor Beginn der Übung

**Aufgabe 1** (2 + 3 + 4 Punkte)

Seien $X$ und $Y$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(b, p_1)$ und $Y \sim \Gamma(b, p_2)$ für beliebige $b, p_1, p_2 > 0$.

(a) Sei $c > 0$. Zeige $cX \sim \Gamma(b/c, p_1)$.

(b) Berechne die Dichte von $Y/X$.
*Hinweis: Verwende Theorem 3.16 aus dem WR-Skript.*

(c) Betrachte die Zufallsvariable $Z = X/(X + Y)$. Es bezeichne $f_Z$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von $Z$. Zeige, dass

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(p_1 + p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} z^{p_1-1}(1-z)^{p_2-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(z).$$

*Beachte: Eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z$ heißt beta-verteilt mit Parametern $p_1$ und $p_2$.*

**Aufgabe 2** (1,5 + 1,5 + 2 + 3 Punkte)

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine beliebige konkrete Stichprobe der Länge $n \geq 2$. Es bezeichne $s_n^2 = s_n^2(x_1, \ldots, x_n)$ die zugehörige Stichprobenvarianz. Ferner seien $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Zeige, dass $s_n^2(x_1 + b, \ldots, x_n + b) = s_n^2(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Zeige, dass $s_n^2(ax_1, \ldots, ax_n) = a^2 s_n^2(x_1, \ldots, x_n)$.

(c) Zeige, dass

$$s_n^2 = \frac{1}{1-n}\left(n\bar{x}_n^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

(d) Betrachte die Abbildung $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, definiert durch

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y)^2.$$

Für welchen Wert $y \in \mathbb{R}$ wird $\psi(y)$ minimal?

Bitte wenden.

**Aufgabe 3** (2 + 1 Punkte)
Betrachte die Stichprobenvariablen $X_1, X_2$, wobei $X_1, X_2$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \text{Ber}(p)$ für beliebiges $p \in (0,1)$.

(a) Bestimme die gemeinsame Verteilung von $\bar{X}_2$ und $S_2^2$.

(b) Sind $\bar{X}_2$ und $S_2^2$ unabhängig?

**Aufgabe 4** (2 + 3 Punkte)
Sei $r \in \mathbb{N}$ und $U_r$ eine $\chi_r^2$-verteilte Zufallsvariable. Zudem bezeichne $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

(a) Zeige, dass

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{U_r - r}{\sqrt{2r}} \leq z\right) = \Phi(z).$$

(b) Zeige, dass

$$\lim_{r\to\infty} P(\sqrt{2U_r} - \sqrt{2r-1} \leq z) = \Phi(z).$$