Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 5

Abgabe am 17.5.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1,5 + 2 + 1,5 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei X_1 exponentialverteilt ist mit Parameter $1/\lambda$ für beliebiges $\lambda > 0$. Es seien $\hat{\lambda}_1(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n$ der ML-Schätzer für λ (vergleiche Blatt 4) und $\hat{\lambda}_2(X_1, \ldots, X_n) = c \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ein weiterer Schätzer für λ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass für eine beliebige absolutstetig verteilte i.i.d. Zufallsstichprobe $(Y_1, \ldots, Y_n)$ mit Verteilungsfunktion $F(\cdot)$ und Dichte $f(\cdot)$ das Minimum $M_n = \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ die folgende Dichte besitzt: $f_{M_n}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$
Hinweis: Bestimme zunächst die Verteilungsfunktion $F_{M_n}(\cdot)$.

(b) Bestimme die Konstante c so, dass $\hat{\lambda}_2(X_1, \ldots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ ist.

(c) Entscheide anhand des MQ-Fehlers, ob $\hat{\lambda}_1(X_1, \ldots, X_n)$ oder $\hat{\lambda}_2(X_1, \ldots, X_n)$ ein besserer Schätzer für λ ist, wobei c die in Teilaufgabe (b) bestimmte Konstante sei.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{U}(\theta, \theta + 2)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$. Betrachte die Schätzer

$$\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{und} \quad \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n - 1$$

(a) Untersuche die beiden Schätzer auf Erwartungstreue.

(b) Untersuche die beiden Schätzer auf asymptotische Erwartungstreue.

(c) Untersuche die beiden Schätzer auf starke Konsistenz.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (3 + 4 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Ber}(p)$ mit Parameter $p \in (0, 1)$.

(a) Bestimme den ML-Schätzer $\widehat{p^2}(X_1, \ldots, X_n)$ für p^2 und untersuche, ob dieser erwartungstreu ist.

(b) Betrachte die beiden Schätzer

$$\hat{p}_1(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n \quad \text{und} \quad \hat{p}_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n\overline{X}_n + 1}{n + 1}$$

für p. Berechne die MQ-Fehler von $\widehat{p_1}$ und $\widehat{p_2}$. Kann man anhand des MQ-Fehlers entscheiden, welcher Schätzer besser ist?

Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)
Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei die Verteilung von X_1, bezeichnet mit P_θ, von einem Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ abhängt. Sei $k \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Schätzer $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, \ldots, X_n)$ seien erwartungstreu für θ, wobei die Schätzvarianzen $0 < \operatorname{Var} \hat{\theta}_i = \sigma_i^2 < \infty$ bekannt und unabhängig von θ seien. Ferner gelte $\operatorname{Cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = 0$ für alle $i \neq j$. Im Folgenden betrachten wir den Schätzer

$$\hat{\theta}^\star(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^k (\hat{\theta}_i / \sigma_i^2)}{\sum_{i=1}^k (1/\sigma_i^2)}.$$

(a) Zeige, dass $\hat{\theta}^\star$ erwartungstreu für θ ist und bestimme die Varianz des Schätzers $\hat{\theta}^\star$.

(b) Zeige, dass $\hat{\theta}^\star$ die kleinste Varianz unter allen erwartungstreuen Schätzern der Form $\sum_{i=1}^k c_i \hat{\theta}_i$ mit $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ besitzt.