



Stochastik I - Übungsblatt 7

Abgabe am 31.5.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien $r \geq 1, s > 2$ beliebig und $W \sim F_{r,s}$. Zeige, dass $\mathbb{E}W = s/(s-2)$.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Sei $\lambda > 0$. Betrachte die Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) , bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. Betrachte die Stichprobenfunktionen $T^{(1)}(X_1, \dots, X_n) = 2n\lambda\bar{X}_n$ und $T^{(2)}(X_1, \dots, X_n) = n\lambda \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

- Bestimme die Verteilung von $T^{(1)}(X_1, \dots, X_n)$ für jedes $n \geq 1$.
- Konstruiere ein (zweiseitiges) Konfidenzintervall für den Parameter λ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ mit Hilfe von $T^{(1)}$.
- Bestimme die Verteilung von $T^{(2)}(X_1, \dots, X_n)$ für jedes $n \geq 1$.
- Konstruiere ein (einseitiges) Konfidenzintervall für den Parameter λ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ mit Hilfe von $T^{(2)}$.

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe (X_1, \dots, X_n) , bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt und $\sigma^2 > 0$ bekannt.

- Wie groß muss der Umfang n der Zufallsstichprobe sein, damit die Länge des Konfidenzintervalls für den Parameter μ zum Niveau $\gamma = 0.95$ höchstens σ beträgt?
- Wie große sollte man die „Risiko“-Wahrscheinlichkeiten α_1 und α_2 mit $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in (0, 1)$ wählen, damit die Länge des Konfidenzintervalls für μ zu Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ minimal wird?

Hinweis: Betrachte die Aufgabe als Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen und nutze das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Größe von Konfidenzintervallen zu verschiedenen Niveaus und bei unterschiedlichen Stichprobenumfängen grafisch veranschaulicht werden. Simuliere hierfür drei Stichproben von unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsvariablen vom Umfang 10, 100 und 1.000 (Verwende hierfür den Befehl `rnorm()`). Gehe nun für die Analyse davon aus, dass der Erwartungswert unbekannt ist, es sei jedoch bekannt, dass er zwischen -1 und 1 liegt. Die Varianz sei bekannt. Plote nun die Konfidenzintervalle für den Erwartungswert zum Niveau $\gamma \in (0, 1)$ in eine Abbildung, indem du auf der x -Achse die Niveaus abträgst, und auf der y -Achse die untere und obere Grenze des Konfidenzintervalls zum jeweiligen Niveau γ . Plote die Kurven für alle 3 Stichprobenumfänge in eine gemeinsame Abbildung. Verwende zur besseren Unterscheidung für den Stichprobenumfang 10 gestrichelte, für 100 durchgezogene und für 1000 fette Linien. Zeichne die x -Achse rot in die Abbildung.