Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Sommersemester 2016

Stochastik I - Übungsblatt 8

Abgabe am 7.6.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4 + 2 + 3 + 4 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \text{Cauchy}(s, t)$ mit $s > 0$ und $t \in \mathbb{R}$, d.h. X_1 ist absolutstetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X_1}(x) = \frac{s}{\pi(s^2 + (x-t)^2)}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Ist $s = 1$ und $t = 0$, so spricht man von einer Standard-Cauchy-Verteilung.

(a) Zeige, dass $(\overline{X}_n - t)/s \sim \text{Cauchy}(1, 0)$.

(b) Sei $\alpha \in (0, 1)$ beliebig. Bestimme das α-Quantil c_α der Standard-Cauchy-Verteilung.

(c) Sei nun s bekannt und t unbekannt. Bestimme unter Verwendung von Teilaufgabe (a) ein Konfidenzintervall für t zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$.

(d) Betrachte eine weitere Zufallsstichprobe $(Y_1, \ldots, Y_{n'})$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen mit $Y_1 \sim \text{Cauchy}(s, t')$. Die Zufallsstichprobe $(Y_1, \ldots, Y_{n'})$ sei unabhängig von der Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$. Es gelte $Y_1 \sim \text{Cauchy}(s, t')$ mit $t' \in \mathbb{R}$. Es sei $s > 0$ bekannt. Bestimme ein Konfidenzintervall für $g(t, t') = t - t'$ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die folgenden Werte geben die Umsatzsteigerung (im 1. Quartal 2006, in Tsd. Euro) der Vertreter eines Staubsaugerunternehmens wieder. In der ersten Gruppe sind die sieben Vertreter des norddeutschen Vertriebes, in der zweiten Gruppe die sieben Vertreter des süddeutschen Vertriebes erfasst.

Index i	1	2	3	4	5	6	7
X_i (Nord)	16	34	13	22	23	25	27
Y_i (Süd)	26	26	19	36	30	29	18

Bestimme ein Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ an, falls $(X_1, \ldots, X_7)$ (Steigerung Nord) und $(Y_1, \ldots, Y_7)$ (Steigerung Süd) voneinander unabhängige Zufallsstichproben, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen sind, wobei $X_1 \sim \text{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y_1 \sim \text{N}(\mu_2, \sigma^2)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Hierbei sei $\sigma^2 = 44$ bekannt und $\alpha = 0.05$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ unbekannt. Sei $\alpha \in (0,1)$ beliebig. Zeige, dass

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_\lambda \left(\left| \lambda - \left(\overline{X}_n + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2n} \right) \right| \leq \sqrt{\frac{\overline{X}_n z_{1-\alpha/2}^2}{n} + \frac{z_{1-\alpha/2}^4}{4n^2}} \right) = 1 - \alpha.$$

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Betrachte die Zufallsstichprobe $(X_1, \dots, X_n)$, bestehend aus i.i.d. Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ mit $p \in (0,1)$ unbekannt. Sei $\alpha \in (0,1)$ beliebig.

(a) Bestimme ein asymptotisches (zweiseitiges) Konfidenzintervall für p zum Niveau $\gamma = 1 - \alpha$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

(b) Zeige, dass

$$\sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\overline{X}_n (1 - \overline{X}_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{für } n \to \infty$$

und nutze die Aussage, um ein weiteres asymptotisches (zweiseitiges) Konfidenzintervall für p zu bestimmen.