Dipl.-Math. Stefan Roth
6. April 2017

SoSe 2017

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 3

Besprechung: 7. April im Kurs.

1 Zufallsvektoren

Aufgabe 1

Es sei $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Zufallsvektor mit folgender Zähldichte:

X_1	$X_2 = 0$	1	2	3
0	1/8	1/4	1/8	0
1	0	1/8	1/4	1/8

(a) Bestimme die Zähldichten von X_1 und X_2.

(b) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimme in folgenden Fällen jeweils $\mathbb{E}[h(X)]$:

i) $h(x_1, x_2) = x_1$.

ii) $h(x_1, x_2) = x_2$.

iii) $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Aufgabe 2

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_K(x_1, x_2),$$

wobei $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe um den Punkt $(0, 0)$ mit Radius 1 sei.

(a) Bestimme die Randdichten von X_1 und X_2 sowie deren Erwartungswerte.

(b) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(c) Bestimme $P((X_1, X_2) \in B)$ für $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2\}$.

2 Momente und Kovarianz

Aufgabe 3

Der Manager eines großen deutschen Konzerns hat stets in seiner linken Hosentasche 10 Krügerrand bei sich für den Champagnerautomaten vor seinem Büro. Für eine Flasche Champagner muss er 3 von den Goldmünzen in den Automaten werfen. Ein Krügerrand wiegt eine Unze. Nimm nun an, dass 4 der 10 Münzen gefälscht sind und nur 0.95 Unzen wiegen.

(a) Da der Manager gerade nichts Besseres zu tun hat, möchte er eine Flasche Champagner aus dem Automaten holen. Dafür zieht er zufällig 3 Münzen aus seiner Tasche. Bestimme das erwartete Gewicht der Münzen.

(b) Um eine Flasche Champagner zu bekommen darf keine der drei Münzen, die er einwirft, gefälscht sein. Wie oft muss der Manager im Mittel in seine Tasche greifen, damit er eine Flasche bekommt, wenn er nach jedem Ziehen die Münzen wieder in die Tasche zurücklegt?

Aufgabe 4

Du gehst ins Casino um Roulette zu spielen und stellst fest, dass es dort ein Limit von 1024 Euro gibt. Andererseits hat die Spielbank einen Kessel ohne Null, sodass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn man auf „Rot“ oder „Schwarz“ setzt, jeweils genau 1/2 ist. Du beschließt wie folgt vorzugehen: Im ersten Spiel setzt du einen Euro auf „Rot“. Gewinnst[1] Du, so hörst Du auf, ansonsten setzt Du in der nächsten Runde das Doppelte. Dieses Vorgehen wiederholst Du so lange, bis Du entweder gewinnst, oder Du den Einsatz nicht mehr verdoppeln kannst, Du also 1024 Euro gesetzt hast und verloren hast. In diesem Fall steigst Du auch aus. Es bezeichne X den Gewinn bei dieser Strategie. Bestimme $\mathbb{E}[X]$ und $\mathsf{Var}(X)$.

Aufgabe 5

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $Y = X^2$.

(a) Bestimme die Kovarianz von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 6

Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\rho(x_1, x_2) = c\frac{1}{(1+x_1+x_2)^6}\mathbb{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$.

(a) Bestimme $c \in \mathbb{R}$ so, dass ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Sei nun c wie in (a) bestimmt und $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit Dichte ρ. Bestimme die Kovarianz von X_1 und X_2 und entscheide, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

3 Der zentrale Grenzwertsatz

Aufgabe 7

Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen und dann das Stichprobenmittel berechnet. Wir fassen dabei die Messungen als Beobachtung einer i.i.d. Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ auf. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel ($\mathbb{E}[X_1]$) sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1mg/l. Verwende bei den folgenden Teilaufgaben den zentralen Grenzwertsatz.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel um mehr als 0.1mg/l vom zu schätzenden Erwartungswert abweicht falls 100 Messungen durchgeführt wurden?

(b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel $\bar{X}_n$ der Messungen um mehr als 0.1mg/l vom wahren Wert abweicht, höchstens 5% beträgt?

[1] wenn du die Runde gewinnst erhältst du das doppelte deines Einsatzes