Extremwerttheorie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2017

ulm university universität uulm

1. Übungsblatt
Abgabe: 4. Mai, 16:15

Allgemeine Hinweise:

- Jede Person hat ein eigenes Blatt abzugeben.
- Falls noch nicht geschehen, bitte im SLC anmelden!
- Bei Aufgaben mit R sind sowohl der Code als auch das Ergebnis abzugeben.

Aufgabe 1: Die Verteilung des Minimums und die gemeinsame Verteilung von Maximum und Minimum
(1+2=3 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots \sim F$ unabhängige Zufallsvariablen.

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von $m_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

b) Bestimme die gemeinsame Verteilungsfunktion von m_n und $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$, d.h. bestimme die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(m_n \leq x, M_n \leq y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: MDA's mit R
(4 Punkte)
Im Max-Anziehungsbereich (MDA) welcher Verteilung liegt die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$?
Simuliere, um diese Frage zu beantworten, 1000 Realisierungen des Maximums $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ für $n = 1, 2, 10, 1000, 10^5$. Zeichne die empirische Verteilungsfunktion und eine Dichte-Schätzung dieser Stichprobe (mittels `ecdf()` und `density()`). An welche der drei in der Vorlesung besprochenen Extremwertverteilungen nähert sich die Verteilung des Maximums (bis auf affine Transformation) an?

Aufgabe 3: MDA's – theoretische Herleitung
(4+3=7 Punkte)

(i) Eine Zufallsvariable X heißt Cauchy-verteilt, falls sie Verteilungsfunktion $F(t) = \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2}$ und Dichte $f(t) = 1/(\pi(1+t^2))$ hat.
Im Max-Anziehungsbereich welcher Verteilung liegt die Cauchy-Verteilung?
Hinweis: Betrachte
$$\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{\pi}\arctan(yx) - \frac{1}{2}}{1/y}.$$

(ii) Sei $r > 0$. Im Max-Anziehungsbereich welcher Verteilung liegt die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, r]$?

Bemerkung: Auch Verteilungen, von denen wir in der Vorlesung noch nicht gezeigt haben, dass sie Extremwertverteilungen sind, sind als Antworten zulässig – verboten sind nur degenerierte Verteilungen.

Aufgabe 4: Konvergenz gegen die degenerierte Verteilung
(6 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen (zum Beispiel die Folge der Maxima von u.i.v. Zufallsvariablen) und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt mit
$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Delta_c, \quad n \to \infty,$$
wobei Δ_c die degenerierte Verteilung
$$\Delta_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq c \\ 0 & \text{falls } t < c \end{cases}$$
bezeichnet.