ulm university universität ulm

2. Übungsblatt

Abgabe: 18. Mai, 16:15

Aufgabe 1: "Vom selben Typ" ist Äquivalenzrelation
(1+1+2=4 Punkte)

Zeige, dass vom selben Typ zu sein eine Äquivalenzrelation für Verteilungsfunktionen ist. D.h. zeige, dass für Verteilungsfunktionen F, G und H gilt

- $F \bowtie F$
- $F \bowtie G \Rightarrow G \bowtie F$
- $F \bowtie G, G \bowtie H \Rightarrow F \bowtie H$.

Aufgabe 2: Eine Verteilung, die in keinem MDA liegt
(4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots \sim Geom(p), p \in (0,1)$, unabhängig, d.h.

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Sei $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Finde Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ bzw. $\mathbb{R}$ mit

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(a_n M_n + b_n \le t) < \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(a_n M_n + b_n \le t) < 1.$$

Verwende ohne Beweis, dass für jedes $x > 0$ und jedes $y \in \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte von

$$\Big(\lfloor y - \frac{\log n}{x} \rfloor + \frac{\log n}{x}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

das Intervall $[y-1, y]$ ist, wobei $\lfloor t \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le t\}$ die Gauß-Klammer bezeichnet.

Aufgabe 3: Konvergenz in Verteilung und in Wahrscheinlichkeit
(2 Punkte)

Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass für eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ eine konvergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable X gilt

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} X, \quad n \to \infty.$$

Zeige, dass $M_n \stackrel{d}{\to} \Delta_b$, wobei Δ_b die degenerierte Verteilung in $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ bezeichnet.

Aufgabe 4: Transformationen der Gumbel-Verteilung
(1+1=2 Punkte)

Sei $X \sim \Lambda$ Gumbel-verteilt.

a) Zeige, dass e^X Fréchet-verteilt ist.

b) Zeige, dass $-e^{-X}$ Weibull-verteilt ist.

Aufgabe 5: Der Satz von Ostrowski
(5+3=8 Punkte)

a) Beweise folgenden Spezialfall des Satzes von Ostrowski. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dann hat f die Form $f(x) = cx, x \in \mathbb{R}$, für ein festes $c \in \mathbb{R}$.
Hinweis: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

b) Zeige, dass es eine nicht-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (1) gibt (diese ist dann zwangsläufig nicht messbar).
Hinweis: $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.