3. Übungsblatt
Abgabe: 8. Juni, 16:15

Aufgabe 1: Charakterisierung der Gumbel-Verteilung durch eine Funktionalgleichung
(3+2=5 Punkte)

a) Sei $d : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $d(s_1 s_2) = d(s_1) + d(s_2)$ für $s_1, s_2 > 0$. Zeige, dass $d(s) = a \cdot \log s$ für alle $s > 0$ und ein festes $a \in \mathbb{R}$.

b) Sei G eine Verteilungsfunktion mit

$$G(t + a \log s) = G^{1/s}(t), \quad t \in \mathbb{R}, s > 0,$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass G entweder degeneriert oder vom selben Typ wie die Gumbel-Verteilung Λ ist.

Aufgabe 2: Beispiele regulär variierender Funktionen
(2+2+2=6 Punkte)

a) Zeige, dass eine Funktion $L : (A, \infty) \to (0, \infty)$ mit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$$

für $\lambda > 1$ langsam variierend ist.

b) Zeige, dass $\log \log x$ langsam variierend ist.

c) Zeige, dass $\exp\{\lfloor \log x \rfloor\}$ nicht regulär variierend ist, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gauß-Klammer bezeichnet.

Aufgabe 3: Quantilfunktion
(2 Punkte)
Gib die Quantilfunktion der $Bin(2, \frac{1}{2})$-Verteilung an und skizziere sie.

Aufgabe 4: Eigenschaften der Quantilfunktion
(1+3=4 Punkte)
Sei $F^{\leftarrow}$ die Quantilfunktion einer Verteilungsfunktion F.

a) Zeige, dass $F^{\leftarrow} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

b) Zeige, dass $F^{\leftarrow} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ linksstetig ist.

Aufgabe 5: Max-Anziehungsbereiche
(3 Punkte)
In Aufgabe 3 des 1. Übungsblatts hatten wir gesehen, dass die Cauchy-Verteilung im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_1 mit $\alpha = 1$ liegt. Gib für diese Tatsache einen neuen Beweis unter Verwendung von Resultaten aus Kapitel 4.