ulm university universität uulm

5. Übungsblatt
Abgabe: 13. Juli, 16:15

Aufgabe 1: Die Normalverteilung
(2+4=6 Punkte)

a) Es bezeichne $\bar{F}$ die Tailfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung. Berechne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\frac{1}{x}\exp(-\frac{x^2}{2})}.$$

b) Zeige, dass die $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt.

Aufgabe 2: Wasserstände und der ML-Schätzer für die GEV-Verteilung
(1+4+2+2=9 Punkte)

a) Lade das R-Paket `evd` (evtl. muss es zuerst installiert werden). Schätze mit Hilfe der Funktion `fgev()` die Parameter der GEV-Verteilung für die Wasserstände aus Dover, die im Datensatz `sealevel` enthalten sind.

b) Programmiere nun den Maximum-Likelihood-Schätzer nach. Entferne hierzu zunächst die fehlenden Werte aus dem Datensatz, implementiere die Log-Likelihood-Funktion und nutze die Funktion `optim()`, um ihr Maximum zu finden. Beachte dabei folgendes:

- Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, maximieren wir alle die Log-Likelihood-Funktion, wählen als Startwert $\gamma = 0$, $\mu = 2$, $\sigma = 1$ und verändern die übrigen Argumente von `optim()` (insbesondere `method`) nicht.
- Die Methode `optim()` erwartet, dass die zu minimierende Funktion von einem vektorwertigen Argument und nicht von mehreren skalaren Argumenten abhängt.
- Außerdem muss die zu minimierende Funktion auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ definiert sein. Setze die Log-Likelihoodfunktion deshalb außerhalb ihres Definitionsbereichs durch -1000 fort.
- Zur Kontrolle: Du musst die gleiche Lösung wie im a)-Teil erhalten.

c) Wir wollen nun das Verhalten der Log-Likelihood-Funktion l genauer untersuchen. Plotte hierzu die Funktionen

$$\mu \mapsto l(\hat{\gamma}, \mu, \hat{\sigma}) \quad \text{und} \quad \sigma \mapsto l(\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \sigma).$$

d) Untersuche, ob die jährlichen Maxima der Wasserstände tatsächlich einer GEV-Verteilung folgen. Zeichne hierzu einen QQ-Plot. Verwende die Funktion `qgev()`, um die theoretischen Quantile zu erzeugen.

Aufgabe 3: Konvergenz von Excessen
(5 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \le 0, \\ 1-(1-t)^\alpha, & \text{falls } t \in [0,1] \\ 1, & \text{falls } t \ge 1, \end{cases}$$

für einen Parameter $\alpha > 0$. Gib eine Funktion $a : (0,1) \to (0,\infty)$ und eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion G explizit an, für die $(X-u)/a(u)$ bedingt darauf, dass $X > u$, gegen G konvergiert:

$$\lim_{u\to 1} \mathbb{P}\Big(\frac{X-u}{a(u)} \le t | X > u\Big) = G(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$