Extremwerttheorie
Dr. Jürgen Kampf
SS 2017

ulm university universität uulm

Probeklausur
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1: Regulär variierende Funktionen
(5+9+8=22 Punkte)

a) Zeige, dass $\sin(x) + 5$ nicht regulär variierend ist.

b) Zeige, dass $\exp\{\log x / \log\log x\}$ langsam variierend ist.

c) Sei $f : (0,\infty) \to (1,\infty)$ regulär variierend mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Zeige, dass $\log f(x)$ langsam variierend ist.

Aufgabe 2: Max-Anziehungsbereiche
(10+7=17 Punkte)

a) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \exp\{-t^2\}, \quad t > 0.$$

Zeige, dass F im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt und gib explizit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda, \quad n \to \infty.$$

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Beta(r, s)-verteilte Zufallsvariablen, $r, s > 0$, d.h. X_1 ist absolut-stetig mit Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(r,s)} t^{r-1}(1-t)^{s-1} & \text{falls } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass die Beta(r, s)-Verteilung im Max-Anziehungsbereich einer Weibull-Verteilung Ψ_α liegt und bestimme den Parameter $\alpha > 0$.

Aufgabe 3: Quantilfunktion
(8 Punkte)

Wir definieren eine Zufallsvariable X wie folgt: Wir werfen eine faire Münze. Zeigt Sie Kopf, setzen wir $X = \frac{3}{4}$, zeigt sie Zahl, erzeugen wir eine (vom Münzwurf unabhängige) auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable Y und setzen $X := Y$.
Bestimme die Quantilfunktion von X und skizziere diese.

Aufgabe 4: Maximum-Likelihood-Schätzung mit R
(8 Punkte)

In einem Vektor `ab` sei eine Stichprobe gespeichert, die einer $G_{1,\mu,\sigma}$-Verteilung folgt (also vom selben Typ wie die Fréchet-Verteilung Φ_1 ist). Weiter kann mit Hilfe der Funktion `dgev(x, shape, loc, scale)` die Dichte der $G_{\texttt{shape},\texttt{loc},\texttt{scale}}$-Verteilung an der Stelle x abgefragt werden. Berechne für die Stichprobe `ab` den Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ für (μ, σ).

Aufgabe 5: Folgen von Zufallsvariablen
(5 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_n, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t + b_n) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6: Existenz von Folgen
(15 Punkte)
Sei F eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt $x^* < \infty$, derart dass $F(x^* - x)$ in $x = 0$ regulär variierend mit Index α ist. Zeige, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1$$

gibt. *Beweise die Aussage analog zum Beweis des Falls $x^* = \infty$ – eine Folgerung aus der Charakterisierung des Max-Anziehungsbereichs der Weibull-Verteilung wäre zirkulär.*
Hinweis: Betrachte beim Beweis, dass die von dir angegebene Folge die gewünschte Eigenschaft hat, den Term $\bar{F}(x^* - \lambda(x^* - a_n))$ für $\lambda > 1$.