Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10
17. 12. 2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 10

Abgabe: 14.01.2010 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Berechne $\mathbb{E}(X^3)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_X(t) = \begin{cases} c \cdot (1-t^2), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Welchen Wert hat die Konstante c? Bestimme die Verteilungsfunktion von X und berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(X \in (0, \frac{1}{2})\right)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Sei $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeige, dass $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \geq 0$.

(b) Bei einer Folge von Würfen mit einem fairen Würfel beschreibe S_n die Summe der Augenzahlen nach dem n-ten Wurf. Berechne approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(S_{100} \in [330, 370]\right)$.

Hinweis: $\Phi(1.023) = 0.847$, $\Phi(1.506) = 0.934$, $\Phi(1.171) = 0.879$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Berechne die erzeugende Funktion von X.

(b) Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Berechne $\mathbb{E}(X^3)$.

(c) Seien $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p)$ und $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeige mit Hilfe der erzeugenden Funktionen, dass $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Zeige, dass

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Verwende den zentralen Grenzwertsatz für die Poissonverteilung.