

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 5

Abgabe: 19.11.2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten E-Mails in einem Postfach. Das Wort “money” komme in einer Spam-Mail mit Wahrscheinlichkeit 0.6 vor, in einer nicht-Spam-Mail mit Wahrscheinlichkeit 0.1. Es seien 80% der E-Mails Spam.

- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass in einer E-Mail das Wort “money” vorkommt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine E-Mail, die das Wort “money” enthält, Spam?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei X die erste Augenzahl und Y die zweite Augenzahl beim zweimaligen Werfen eines fairen Würfels. Sei $V = \min(X, Y)$ und $W = \max(X, Y)$. Berechne die Kovarianz $\text{Cov}(V, W)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(V, W)$ von V und W . (Hinweis: Um $\mathbb{E}(VW)$ zu berechnen, zeige, dass $VW = XY$ und benutze die Unabhängigkeit von X und Y)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine Zufallsvariable Z heißt gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, falls $\mathbb{P}(Z = i) = 1/n$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$. Berechne die Verteilung von $Z = X + Y$, d. h. die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Z = k)$ für alle $k \in \text{Im}(Z)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \text{Poi}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Poi}(\lambda_2)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Bestimme für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $k = 0, \dots, n$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X_1 = k$, gegeben dass $X_1 + X_2 = n$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Seien $X_1 \sim \text{Geo}(p_1)$ und $X_2 \sim \text{Geo}(p_2)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $p_1, p_2 \in [0, 1]$ mit $p_1 \neq p_2$.

- Zeige, dass $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \cdot ((1 - p_2)^{n-1} - (1 - p_1)^{n-1})$ für alle $n \geq 2$.
- Zeige, dass $\min(X_1, X_2) \sim \text{Geo}(p_1 + p_2 - p_1 p_2)$.