Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 6 – Lösungen

Hinweise zu vorherigen Lösungen:

- Blatt 5, Aufgabe 5(b):

  An der Tafel : $\mathbb{P}(X_1 \geq n) = ... = p_1 \left(1 - \sum_{k=0}^{n-2}(1-p_1)^{k-1}\right) = ...$

  richtig : $\mathbb{P}(X_1 \geq n) = ... = 1 - p_1 \sum_{k=0}^{n-2}(1-p_1)^{k-1} = ...$

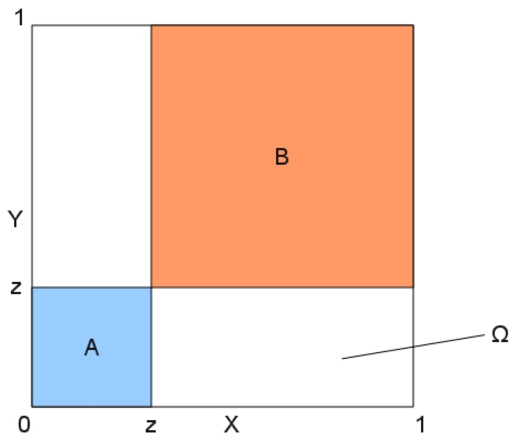
- Blatt 6, Aufgabe 5:

  An der Tafel : $\mathbb{P}(V = b) = ... = \frac{p^2(1-p)^{|b|}}{2-p}$

  richtig : $\mathbb{P}(V = b) = ... = \frac{p(1-p)^{|b|}}{2-p}$

Aufgabe 1

Seien X und Y zufällig aus $[0,1]$ ausgewählt (d. h. X und Y sind unabhängige und auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen, vgl. Aufgabe 1, Blatt 7).



Wir tragen die Werte von X auf der x-Achse und die Werte von Y auf der y-Achse ab. Da X und Y aus [0,1] gewählt werden, ist die Menge aller möglichen Kombinationen von X und Y gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega &= [0,1] \times [0,1] \\ \Rightarrow |\Omega| &= |[0,1] \times [0,1]| = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Sei $z \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(V \leq z) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z).$$

Dies bedeutet, dass sowohl X als auch Y kleiner oder gleich z sein müssen und deshalb nur Werte von X und Y in der blauen Fläche A möglich sind. Da $|A| = z^2$, folgt mit Hilfe der geometrischen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z) = \frac{|A|}{|\Omega|} = z^2.$$

Für $z \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ gilt:

$$\mathbb{P}(V \leq z) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 1, \end{cases}$$

da $0 \leq X, Y \leq 1$ ist. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_V(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z^2, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases} \\ \Rightarrow f_V(z) &= \begin{cases} 2z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei wieder $z \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(W \leq z) = \mathbb{P}(\min(X,Y) \leq z) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z).$$

Dies bedeutet, dass sowohl X als auch Y größer als z sein müssen und deshalb nur Werte von X und Y in der orangenen Fläche B möglich sind. Da $|B| = (1-z)^2$, folgt mit Hilfe der geometrischen Wahrscheinlichkeit

$$1 - \mathbb{P}(X > z, Y \leq z) = 1 - \frac{|B|}{|\Omega|} = 1 - (1-z)^2.$$

Für $z \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ gilt:

$$\mathbb{P}(W \leq z) = \mathbb{P}(\min(X,Y) \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 1, \end{cases}$$

da $0 \leq X, Y \leq 1$ ist. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_W(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - (1-z)^2, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases} \\ \Rightarrow f_W(z) &= \begin{cases} 2(1-z), & 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $0 \leq x \leq y \leq a$. Der Stab sei wie in der folgenden Abbildung an den Stellen x und y durchsägt worden.

Die dadurch entstehenden Teilstücke sind als 1, 2 und 3 nummeriert. Ein Dreieck kann man aus den drei Teilstücken genau dann bilden, wenn die Summe der Länge von jeweils zwei Seiten größer als die Länge der dritten Seite ist. Dadurch ergeben sich die folgenden Bedingungen:

(1) Länge von Teil 1 $<$ Länge von Teil 2 $+$ Länge von Teil 3 $\Leftrightarrow x < (y-x) + (a-y)$

(2) Länge von Teil 2 $<$ Länge von Teil 1 $+$ Länge von Teil 3 $\Leftrightarrow y - x < x + (a-y)$

(3) Länge von Teil 3 $<$ Länge von Teil 1 $+$ Länge von Teil 2 $\Leftrightarrow a - y < x + (y-x)$

bzw.

(1) $x < \frac{a}{2}$

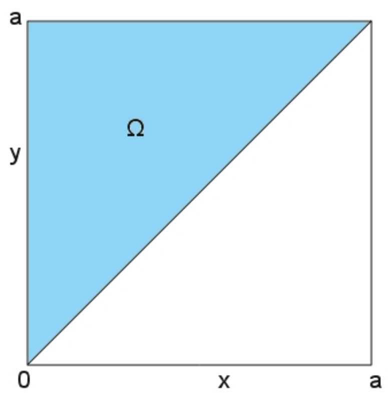
(2) $y < x + \frac{a}{2}$

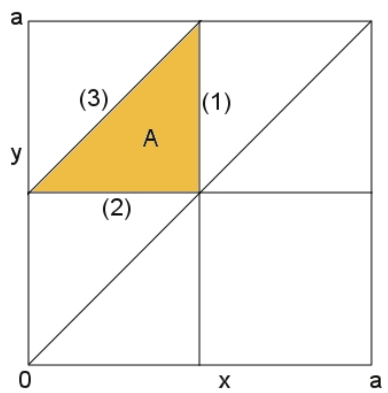
(3) $y > \frac{a}{2}$

Da wir zu Beginn $0 \leq x \leq y \leq a$ vorausgesetzt haben, wird als Grundraum

$$\Omega = \{(x,y) \in [0,a]^2 : 0 \leq x \leq y \leq a\}$$

gewählt. Die 3 Bedingungen schränken die Werte für x und y weiter auf die Fläche A ein.





Es ergibt sich

$$|\Omega| = \frac{1}{2}a^2, \quad |A| = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

und somit

$$\mathbb{P}(\text{“Es lässt sich ein Dreieck bilden”}) = \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}.$$