Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10
26. 11. 2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 7

Abgabe: 3.12.2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Seien X und Y unabhängige und auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimme $\mathbb{P}(X/Y > 2)$ und $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$. (Hinweis: Interpretiere beide Wahrscheinlichkeiten als geometrische Wahrscheinlichkeiten)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}(X > u + v | X > u) = \mathbb{P}(X > v), \quad \forall u, v \geq 0.$$

(b) Sei $Y \sim \mathrm{Geo}(p)$ mit $p \in (0,1)$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}(X > u + v | X > u) = \mathbb{P}(X > v), \quad \forall u, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien X_1 und X_2 unabhängige und auf $[-1,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimme die Dichte von $Z = X_1 + X_2$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $n \in \{0, 1, 2, ..., n_1 + n_2\}$.

(a) Zeige, dass $\sum_{i=0}^{n} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{n-i} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

(b) Seien $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $p \in [0,1]$. Zeige, dass

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p).$$

Hinweise zu (a):

- Interpretiere die einzelnen Summanden als Mächtigkeit von geeigneten Mengen.
- $\binom{m}{k}$ ist per Definition gleich 0 falls $k < 0$ oder $k > m$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Sei $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Bestimme die Dichte von X^2.