Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10
3. 12. 2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 8

Abgabe: 10.12.2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $X \sim \mathrm{U}[0,1]$. Bestimme die Dichte von $Z := \frac{1}{X}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Bei einer Folge von Würfen mit einem fairen Würfel beschreibe S_n die Summe der Augenzahlen nach dem n-ten Wurf. Zeige mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung, dass

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{100}}{100} \notin (3,4)\right) \leq \frac{7}{60}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien $A_1, A_2, ...$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $1_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

(iii) $1_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1), ..., X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$. Zeige, dass $Z := \min\{X_1, ..., X_n\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$. (Hinweis: Berechne zuerst $\mathbb{P}(Z > u)$ für $u > 0$)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Sei Z eine beliebige Zufallsvariable und $\delta > 0$. Zeige, dass es ein $A > 0$ gibt, so dass

$$\mathbb{P}(|Z| > A) < \delta.$$

(b) Seien $X_1, X_2, ...$ beliebige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige, dass es eine Folge von reellen positiven Zahlen $a_1, a_2, ...$ gibt mit der Eigenschaft

$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0.$$

Hinweis zu (b): Verwende das Lemma von Borel-Cantelli.