Junior-Prof. Dr. Z. Kabluchko
Wolfgang Karcher

WS 2009/10
10. 12. 2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 9

Abgabe: 17.12.2009 vor den Übungen

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\alpha > 0$ und X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^\alpha}, & t \geq 1. \end{cases}$$

(a) Berechne die Dichte von X.

(b) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}X$ für $\alpha > 1$ und zeige, dass $\mathbb{E}X = \infty$ für $0 < \alpha \leq 1$.

(c) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(X^2)$ für $\alpha > 2$ und zeige, dass $\mathbb{E}(X^2) = \infty$ für $0 < \alpha \leq 2$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, ...$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \text{Poi}(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$ und $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien $A_1, A_2, ...$ unabhängige Ereignisse.

(a) Zeige: $1_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. (Hinweis: Lemma von Borel-Cantelli)

(b) Sei $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $1_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $1_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim U[0,1]$, $i = 1, ..., n$. Zeige, dass $\mathbb{E}[\max(X_1, ..., X_n)] = \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim U[0,1]$, $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot ... \cdot X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \frac{1}{e}.$$

Hinweis: Betrachte $\ln\left(\sqrt[n]{X_1 \cdot ... \cdot X_n}\right)$ und zeige, dass $\mathbb{E}[\ln X_i] = -1$.