Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
22.10.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Wir betrachten die Familie aller reellwertigen Verteilungen mit Dichte der Form

$$f_\mu(x) = e^{-(x-\mu)} \mathbb{1}_{\{x \geq \mu\}},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechne für eine Folge von iid gemäß f_μ verteilten Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ einen Momentenschätzer und einen Maximum-Likelihood-Schätzer für μ.

(b) Untersuche die in (a) berechneten Schätzer auf Erwartungstreue und starke Konsistenz.

Aufgabe 2

Eine Familie von reellwertigen parametrischen Verteilungen heißt Exponentialfamilie, wenn sich die (Zähl-)Dichten $f_\theta(x)$ für alle $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ im Parameterraum $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ in der Form

$$f_\theta(x) = h(x)c(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^m w_i(\theta)t_i(x)\right),\ x \in \mathbb{R}$$

darstellen lassen.

(a) Zeige, dass die Familie der Gamma-Verteilungen mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ eine Exponentialfamilie in α und β ist.

(b) Für eine Exponentialfamilie gelte

$$\frac{\partial^k}{\partial \theta_j^k} \int_{\mathbf{R}} h(x)\exp\left(\sum_{i=1}^m w_i(\theta)t_i(x)\right) dx = \int_{\mathbf{R}} h(x) \frac{\partial^k}{\partial \theta_j^k} \exp\left(\sum_{i=1}^m w_i(\theta)t_i(x)\right) dx \tag{1}$$

für $k = 1, 2$ und $j = 1, \dots, m$. Zeige, dass dann

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(X)\right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log c(\theta) \text{ und}$$
$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(X)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \log c(\theta) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 w_i(\theta)}{\partial^2 \theta_j} t_i(X)\right)$$

Hinweis: Beginne mit der Beobachtung, dass $c(\theta) = \left(\int_{\mathbf{R}} h(x)\exp\left(\sum_{i=1}^m w_i(\theta)t_i(x)\right) dx\right)^{-1}$. Logarithmieren und Differentiation führen zu den obigen Gleichungen.

Bitte wenden

(c) Zeige, dass sich die Gleichungen aus (b) für eine Parametrisierung der Form

$$f_\theta(x) = h(x)c^*(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i t_i(x)\right) \tag{2}$$

wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t_j(X)) &= -\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log c^*(\theta),\\ \mathrm{Var}(t_j(X)) &= -\frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2}\log c^*(\theta).\end{aligned}$$

Wähle eine Parametrisierung für die Gamma-Verteilung, so dass sich die Dichte in der Form (2) darstellen lässt und berechne damit Erwartungswert und Varianz. Die Voraussetzung (1) kann dabei als gegeben betrachtet werden.