Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
26.10.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Es seien $X_1, \dots, X_n$ iid Stichprobenvariablen, deren Verteilung zu einer Exponentialfamilie gehört. Die zugehörige Zähldichte habe die Form

$$f_\theta(x) = h(x)c(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)t_i(x)\right)$$

für $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, $d \leq k$. Zeige, dass

$$T(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_1(X_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} t_k(X_j)\right)$$

ein suffizienter Schätzer für θ ist.

Aufgabe 2
Untersuche, ob folgende Familien von Verteilungen Exponentialfamilien sind.

- Die Normalverteilungsfamilie mit Parameter μ oder σ^2 bekannt oder beiden Parametern unbekannt.
- Die Familie der Log-Normalverteilungen mit Parameter μ oder σ^2 bekannt oder beiden Parametern unbekannt.
- Die Familie der Poisson-Verteilungen mit Parameter $\lambda \geq 0$.
- Die Familie der Verteilungen mit Dichte $f_\theta(x) = \theta^{-1}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$.

Aufgabe 3
Es seien $X_1, \dots, X_n$ iid Stichprobenvariablen. Bestimme für die folgenden Fälle, falls möglich, einen Momentenschätzer für den Parametervektor θ:

(a) $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, für $i = 1, \dots, n$ und $\theta = (\alpha, \beta) \in (0, \infty)^2$.

(b) Die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ haben die Dichte $f_\theta(x) = \left(\pi\beta\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right)^{-1}$, wobei $\theta = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4
Bestimme einen ML-Schätzer für den Parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, für

$$f_{(\theta_1,\theta_2)}(x) = \theta_1^{-1}\exp\left(-\frac{x - \theta_2}{\theta_1}\right)\mathbb{1}_{[\theta_2,\infty)}(x),\ \theta_2 \in \mathbb{R},\ \theta_1 > 0.$$