Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko WS 2010/2011
Sebastian Lück 02.11.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Die inverse Gauß-Verteilung hat die Dichte

$$f_{\mu,\lambda} = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\lambda \frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

wobei $\mu, \lambda > 0$. Berechne Maximum-Likelihood-Schätzer für μ und λ.

Aufgabe 2
Eine Versicherungsgesellschaft nimmt an, dass ihre inflations- und bestandsvereinigten Jahresschäden aus dem Feuerversicherungsgeschäft paretoverteilt sind, d.h. die Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

für unbekannte Parameter $\alpha, \beta > 0$ haben.

(a) Berechne die Quantilfunktion der Paretoverteilung.

(b) Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für (α, β)

(c) Um festzustellen, wie viel Risikokapital vorgehalten werden muss, um die spartenspezifische Ruinwahrscheinlichkeit unter 0.005 zu halten, soll der Value-at-Risk $\mathrm{VaR}_{0.995}(X)$ geschätzt werden. Daten liegen dabei lediglich aus den letzten 50 Jahren vor. Deshalb sollen in einer Simulationsstudie zunächst verschiedene Schätzmethoden verglichen werden. Schreibe ein Programm, das folgende Funktionalitäten aufweist:

   – Simulation von paretoverteilten Zufallszahlen.
   Hinweis: Sei F^{-1} die inverse einer Verteilungsfunktion F und $Y \sim U[0,1)$ gleichverteilt auf $[0,1)$, dann hat $F^{-1}(Y)$ die Verteilungsfunktion F. Gleichverteilte Pseudozufallszahlen lassen sich in R mit dem Kommando 'runif' erzeugen.

   – Berechnung des in (b) bestimmten ML-Schätzers.

   – Berechnung eines empirischen Quantils.

(d) Führe 10000 Simulationsruns durch, in denen jeweils 50 paretoverteilte Zufallszahlen erzeugt werden, wobei $\alpha = 1$ und $\beta = 3$ ist (für die Versicherung sind die Werte in Mio. € zu interpretieren).

Bitte wenden

Schätze für jeden Run den $\mathrm{VaR}_{0.995}(X)$ mittels des empirischen Quantils und alternativ dazu basierend auf der theoretischen Quantilfunktion, wenn die Parameter α und β durch ihre ML-Schätzer ersetzt werden. Visualisiere die Differenz der beiden Schätzwerte in einem Histogramm.

(e) Kann man einen Ratschlag für die Wahl der Schätzmethode geben?

Aufgabe 3
Die Zufallsvariable X sei lognormal-verteilt mit Parametern μ and σ^2. Ferner seien Φ und q_α die Verteilungsfunktion und das α-Quantil der Standardnormalverteilung.

(a) Zeige, dass $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \exp(\mu + q_\alpha \sigma)$.

(b) Zeige, dass

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}\big(X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\big) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\Big(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\Big)\big(1 - \Phi(q_\alpha - \sigma)\big).$$