Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
09.11.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Ein Lebensversicherer plant, sein Geschäft auf den internationalen Markt auszudehnen. Für ein Pilotprojekt wurde ein erstes Land ausgewählt. Um dort Lebensversicherungstarife anbieten zu können, soll nun überprüft werden, ob die biometrischen Rechnungsgrundlagen aus Deutschland ohne Modifikationen übertragen werden können. Im folgenden sollen verschiedene statistische Tests dazu verwendet werden, die unterstellten Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern im Alter zwischen 40 und 50 auf Abweichungen von den empirischen Daten des neuen Marktes zu untersuchen.

Die Daten sind in folgender Tabelle gegeben:

Alter x	Bestand l_x	Unterstellte Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x^{(0)}$	Beobachtete Tote Z_x	Erwartete Tote $E_x = l_x q_x$
40	13253	0,0011151	16	14,78
41	12588	0,0012369	20	15,57
42	13402	0,0013706	23	18,37
43	13233	0,0015148	22	20,05
44	13896	0,0016709	22	23,22
45	12785	0,0018403	22	23,53
46	11568	0,0020216	21	23,39
47	11862	0,0022190	20	26,32
48	11586	0,0024325	25	28,18
49	12003	0,0026628	30	31,96
50	12455	0,0029127	42	36,28
51	12052	0,0031843	45	38,38
52	11837	0,0034790	49	41,18
53	12121	0,0038024	49	46,09
54	12635	0,0041566	54	52,52
55	12577	0,0045493	55	57,22

Offensichtlich gilt $Z_x \sim \text{Bin}(l_x, q_x)$, $x = 40, \dots, 55$.

(a) Leite einen asymptotischen χ^2-Anpassungstest zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : q_x = q_x^{(0)}\ x = 40, \dots, 55$ her.

(b) Ist es aus statistischer Perspektive sinnvoll, die Sterbewahrscheinlichkeiten in der obigen Tabelle zur Tarifentwicklung in dem neuen ausländischen Markt einzusetzen?

Aufgabe 2
Es wird angenommen, dass die jährliche Anzahl an Autounfällen in einer Stadt Poisson-verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$. In den zurückliegenden Jahren betrug die durchschnittliche Anzahl an Autounfällen pro Jahr 15, während im letzten Jahr nur 10 Unfälle passiert sind. Ist es gerechtfertigt, zu behaupten, dass die jährliche Unfallrate gesunken ist? Teste zur Beantwortung dieser Frage die Hypothese $H_0 : \lambda \geq 15$ gegen die Alternative $H_1 : \lambda < 15$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ mit Hilfe eines asymptotischen Tests.

Aufgabe 3
Wir nehmen an, dass $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, \dots, n_1$ und $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i = 1, \dots, n_2$, unabhängige Stichproben sind. Konstruiere mit Hilfe der Testgröße

$$T(X_{11}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, \dots, X_{2n_2}) = \frac{(n_2 - 1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_{n1})^2}{(n_1 - 1)\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_{n2})^2}$$

einen Test für $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Teste zum Niveau $\alpha = 0.1$, ob die Stichproben

$$(253, 244, 253, 261, 260) \text{ und } (268, 274, 266, 256, 266, 272, 260)$$

gleiche Varianzen haben.

Aufgabe 4
Eine Computerfirma möchte ihren Kunden anbieten, beim Kauf eines PCs eine Ausweitung der Garantiezeit zu erwerben. Das daraus resultierende Risiko möchte die Firma mit Hilfe eines externen Versicherungsunternehmens absichern. Das Versicherungsunternehmen hat die Erfahrung gemacht, dass sich die Betriebsdauer von PCs bis zum Ausfall des Systems gut durch eine Normalverteilung modellieren lässt. Die tatsächliche Lebensdauer beim Kunden lässt sich dann durch eine Lineartransformation der Betriebsdauer beschreiben. Bei der Versicherung weiß man, dass die Standardabweichung der Betriebsdauer von PCs unabhängig vom Fabrikat bei etwa $\sigma = 300$ Tagen liegt. Der Erwartungswert μ der Betriebsdauer ist allerdings stark von der Qualität des PCs abhängig. Der Hersteller behauptet, die erwartete Betriebsdauer seiner PCs liege bei $\mu = 1275$ Tagen. Dies möchte der PC-Hersteller mit einer Messreihe belegen, bei der die Betriebszeit von 20 PCs bis zum Ausfall protokolliert worden ist. Das Versicherungsunternehmen führt nun einen Test auf $H_0 : \mu = 1275$ durch, wobei H_0 abgelehnt wird, wenn

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma} < z_\alpha.$$

z_α ist dabei das α-Quantil der Standard-Normalverteilung.

(a) Schreibe ein Programm, dass die Macht $P_\mu(T(X_1, \dots, X_n) < z_\alpha)$ des Tests in Abhängigkeit von μ, μ_0, n, σ und α berechnet.

(b) Ist der Stichprobenumfang ausreichend, um H_0 bei Abweichung des Erwartungswertes von den angegebenen 1275 Tagen um 200 Tage nach unten mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% abzulehnen?

(c) Plotte die Macht des Tests für $\mu_0 = 1275$, $\mu_1 = 1075$ und $\alpha = 0.05$ in Abhängigkeit von $n \in \{1, \dots, 100\}$ für $\sigma \in \{200, 250, \dots, 700\}$.

Bitte wenden!

(d) Wie hoch hätte der Stichprobenumfang in der obigen Versuchsserie gewählt werden müssen, damit eine solche Abweichung mit Wahrscheinlichkeit 0.99 als signifikant erkannt wird? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn $\sigma = 440$ gewählt wird?

(e) Die Versicherung möchte eine konservative Berechnung der Prämie vornehmen und deshalb den größtmöglichen ganzzahligen Wert für μ zugrunde legen, dessen Unterschreitung mit Wahrscheinlichkeit 0.99 zu einer Ablehnung von $H_0 : \mu = 1275$ geführt hätte. Berechne diesen Wert numerisch.