Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück WS 2010/2011
16.11.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Seien X und Y Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion, Copula C und Randverteilungen F bzw. G. Zeige folgende Aussagen über die Verteilung der Ordnungsstatistiken $\min\{X, Y\}$ und $\max\{X, Y\}$.

(a) $P(\max\{X, Y\} \le t) = C(F(t), G(t))$ und $P(\min\{X, Y\} \le t) = F(t)+G(t)-C(F(t), G(t))$.

(b) Es gelten folgende Ungleichungen

$$\max\{0,\ F(t) + G(t) - 1\}P(\max\{X, Y\} \le t) \le \min\{F(t),\ G(t)\},$$
$$\max\{F(t),\ G(t)\} \le P(\min\{X, Y\} \le t) \le \min\{1,\ F(t) + G(t)\}.$$

Aufgabe 2
Der Zufallsvektors (X, Y) habe Gumbels bivariate logistische Verteilung, d.h., die gemeinsame Verteilungsfunktion sei

$$F_{X,Y}(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Berechne die Randverteilungen von X und Y und zeige, dass die Copula von (X, Y) gegeben ist durch

$$C_{X,Y}(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Aufgabe 3
Betrachte das multiple lineare Regressionsmodell $Y = X\beta + \varepsilon$ im Fall, dass die Designmatrix $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vollen Rang m hat.

(a) Zeige, dass folgende Quadratsummenzerlegung gilt:

$$Y^T Y = \widehat{Y}^T \widehat{Y} + (Y - \widehat{Y})^T (Y - \widehat{Y}),$$

wobei $\widehat{Y} = X\widehat{\beta}$ und $\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

(b) Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Störgrößen $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ unkorelliert und normalverteilt sind mit gleicher Varianz $\sigma^2 > 0$, kann man zeigen, dass

$$\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1}) \text{ und}$$
$$\frac{(n - m)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}(Y - X\widehat{\beta})^T (Y - X\widehat{\beta}) \sim \chi^2_{n-m}.$$

Außerdem kann man zeigen, dass diese beiden Schätzer unabhängig sind. Leite mit Hilfe dieser Aussagen ein Konfidenzintervall für β_j her und konstruiere einen t-Test für $H_0: \ \beta_j = 0$ vs. $H_1: \ \beta_j \neq 0$. Dabei soll $j \in \{1, \ldots, m\}$ beliebig aber fest gewählt sein.

Aufgabe 4

Eine Versicherung möchte im Rahmen der Risikoprüfung vor der Policierung einer Lebensversicherung vom Body-Mass-Index (BMI=Gewicht in kg / (Körpergröße in m)^2) der versicherten Person auf deren systolischen Blutdruck schließen. In einer Stichprobe mit 6 männlichen Probanden erhält man folgende Werte:

BMI	26	23	27	28	24	25
Blutdruck	170	150	160	175	155	150

(a) Stelle ein passendes lineares Regressionsmodell auf und berechne den MKQ-Schätzer $\widehat{\beta}$.

(b) Berechne unter den Annahmen aus Aufg. 3 (b) ein 95%-Konfidenzintervall für den linearen Einflussfaktor des BMI und teste mit dem in Aufg. 3 (b) entwickelten Verfahren, ob der BMI zum Niveau $\alpha = 0.05$ einen signifikanten Einfluss auf den Blutdruck hat.