Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko WS 2010/2011
Sebastian Lück 08.12.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Sei Y ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\mu = \mathbb{E}Y$ und Kovarianzmatrix $K = \mathrm{Cov}(Y)$. Dann heißt Y normalverteilt, wenn $Y \stackrel{d}{=} \mu + BZ$, wobei $Z \sim N(0, I_r)$ ein r-dimensionaler, regulär multivariat normalverteilter Zufallsvektor ist und $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ mit $\mathrm{rg}(B) = r$, so dass $K = BB^T$. Zeige, dass ein ein n-dimensionaler Zufallsvektor Y mit Erwartungswertvektor $\mu = \mathbb{E}Y$ und Kovarianzmatrix $K = \mathrm{Cov}(Y)$ vom Rang $\mathrm{rg}(K) = r$ mit $r \leq n$ genau dann normalverteilt ist, wenn

(a) die charakteristische Funktion $\varphi(t) = \mathbb{E}\exp\Big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n t_j Y_j\Big)$ von Y gegeben ist durch

$$\varphi(t) = \exp\Big(\mathrm{i}t^T\mu - \frac{1}{2}\, t^T K t\Big)\,, \qquad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n\,,$$

(b) die lineare Funktion $c^T Y$ von Y für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c \neq 0$ normalverteilt ist mit

$$c^T Y \sim \mathrm{N}(c^T \boldsymbol{\mu}, c^T K c)\,.$$

Dabei darf ohne Beweis benutzt werden, dass jede nicht-negativ definite Matrix $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vom Rang r in der Form $K = BB^T$ geschrieben werden kann, wobei $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ und $\mathrm{rg}(B) = r$.

Aufgabe 2
Beweise folgende Aussagen. Hierzu kann benutzt werden:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}(e^{ihx} - 1) = x \qquad \text{und} \qquad |\frac{1}{h}(e^{ihx} - 1)| \leq |x|$$

(a) Sei Z ein (n–dimensionaler) Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion $\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp\{\mathrm{i}\, t^T Z\})$. Falls $\mathbb{E}(\|Z\|^p) < \infty$ für ein $p \in \mathbb{N}$, dann existieren die r–ten partiellen Ableitungen von φ für jedes $r \leq p$ und für beliebige $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ mit $i_1 + \cdots + i_n = r$ gilt:

$$\mathbb{E}(Z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n}) \;=\; \mathrm{i}^{-r}\, \frac{\partial^r \varphi(t)}{\partial t_1^{i_1} \ldots \partial t_n^{i_n}}\Big|_{t=0}\,.$$

Insbesondere gilt:

$$\mathbb{E}(Z_j) \;=\; \mathrm{i}^{-1}\, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j}\Big|_{t=0} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(Z_j Z_k) \;=\; -\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t_j \partial t_k}\Big|_{t=0}\,.$$

(b) Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)^T \sim \mathrm{N}(0, K)$ ein (zentrierter) normalverteilter Zufallsvektor mit Kovarianzmatrix $K = (k_{ij})$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mu_i \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = k_{ij}\,.$$

Aufgabe 3
Sei $Y \sim \mathrm{N}(\mu, K)$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix K. Außerdem sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige $m \times n$-Matrix für $m \leq n$ mit $\mathrm{rg}(A) = m$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass $Z = AY + c$ ein m-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor ist mit $Z \sim N(A\mu + c,\ AKA^T)$.

Aufgabe 4
Sei $X = (X_1, X_2, X_3)^T \sim \mathrm{N}(\mu, K)$ mit Erwartungswertvektor $\mu = (1, 2, 3)^T$ und Kovarianzmatrix

$$K = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_2 und $(X_1, X_3)^T$.

(b) Für welchen Wert von ρ sind die Zufallsvariablen $X_1 + X_2 + X_3$ und $X_1 - X_2 - X_3$ unabhängig?