Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko
Sebastian Lück

WS 2010/2011
15.12.2010

Risikotheorie II
Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Seien U_1 und U_2 unabhängige und auf dem Intervall $(0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen

$$Y_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \text{ und } Y_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

unabhängig und standardnormalverteilt sind.

Aufgabe 2

(a) Schreibe ein Programm, das für eine positiv definiten Kovarianzmatrix K und einen Erwartungswertvektor μ eine Realisierung eines $N(\mu, K)$-verteilten Zufallsvektors generiert.

(b) Gegeben sei die Kovarianzmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 33 & 17 & -15 & -30 & -20 & 8 & 26 & 45 & 17 & 5 \\ 17 & 38 & -28 & 1 & -15 & 15 & 20 & 37 & 6 & -2 \\ -15 & -28 & 88 & -22 & 42 & 16 & 3 & -18 & -10 & -17 \\ -30 & 1 & -22 & 79 & 5 & -25 & -18 & -29 & -10 & 0 \\ -20 & -15 & 42 & 5 & 47 & 0 & -18 & -8 & 14 & -12 \\ 8 & 15 & 16 & -25 & 0 & 63 & 38 & 8 & 12 & 3 \\ 26 & 20 & 3 & -18 & -18 & 38 & 77 & 47 & 12 & -6 \\ 45 & 37 & -18 & -29 & -8 & 8 & 47 & 108 & 49 & -11 \\ 17 & 6 & -10 & -10 & 14 & 12 & 12 & 49 & 92 & 3 \\ 5 & -2 & -17 & 0 & -12 & 3 & -6 & -11 & 3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix steht zum Download auf der Homepage zur Verfügung. Simuliere jeweils 100 Mal eine Stichprobe vom Umfang $n = 10, 20, \dots, 1000$ eines $N(0, K)$-verteilten Zufallsvektors und schätze aus jeder der Stichproben die Kovarianzmatrix $\widehat{K}$. Betrachte für jede Realisierung den mittleren, minimalen und maximalen Eintrag oberhalb der Diagonalen von $\widehat{K} - K$ und visualisiere deren Mittelwert bezüglich der 100 Stichproben in Abhängigkeit von n.

(c) Wiederhole Aufgabenteil (b) für $N(0, K_d)$-verteilte Zufallsvektoren, wobei $K_d = (k_{ij})_{i,j=1}^d$ und $d = 2, ..., 9$.

Aufgabe 3

Betrachte das lineare gemischte Modell $y = X\beta + U\gamma + \varepsilon$ mit

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\right).$$

Die Zufallsvektoren γ und ε seien also unabhängig und wir setzen zusätzlich voraus, dass die Kovarianzmatrizen G und R positiv definit sind.

(a) Bestimme die Verteilung von y und die gemeinsame Verteilung von $(y, \gamma)^T$.

(b) Leite unter der Annahme, dass R und G bekannt sind einen KQ-Schätzer für β her.
Hinweis: Transformiere das gemischte lineare Modell in ein klassisches lineares Modell mit unabhängigen $N(0, 1)$-verteilten Störgrößen.