2 Max-Anziehungsbereiche

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Wir sagen, dass F im Max-Anziehungsbereich einer Verteilungsfunktion G liegt, falls es reellwertige Folgen $a_n > 0$ und b_n gibt mit

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G \text{ für } n \to \infty.$$

Im Folgenden werden wir die Max-Anziehungsbereiche der Verteilungen Φ_α, Ψ_α und G beschreiben.

2.1 Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α

Wir haben bereits gesehen, dass die Verteilung mit der Tailfunktion $\bar{F}(t) = t^{-\alpha}$, $t \geq 1$, im Max-Anziehungsbereich von Φ_α liegt. Wir werden zeigen, dass der Anziehungsbereich von Φ_α aus allen Verteilungen besteht, deren Tailfunktionen sich im gewissen Sinne wie $t^{-\alpha}$ verhalten. Der entsprechende Begriff ist die reguläre Variation.

Definition 2.1. *Eine messbare Funktion $f : (A, \infty) \to (0, \infty)$ heißt regulär variierend in $+\infty$ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\alpha \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Bezeichnung: $f \in RV_\alpha$.

Beispiel 2.2. Die Funktion $f(t) = ct^\alpha$, wobei $c > 0$, ist regulär variierend mit Index α, denn

$$\frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \frac{c(\lambda t)^\alpha}{ct^\alpha} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Beispiel 2.3. Die Funktion $f(t) = ct^\alpha (\log t)^\beta$, mit $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ist regulär variierend mit Index α, denn

$$\frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \frac{c(\lambda t)^\alpha (\log(\lambda t))^\beta}{ct^\alpha (\log t)^\beta} = \lambda^\alpha \left(\frac{\log t + \log \lambda}{\log t} \right)^\beta \to \lambda^\alpha$$

für $t \to +\infty$ und alle $\lambda > 0$.

Definition 2.4. *Eine Funktion f ist langsam variierend in $+\infty$ wenn $f \in RV_0$, d.h.*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = 1 \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Beispiel 2.5. Die Funktion $f(t) = (\log t)^\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ ist langsam variierend.

Theorem 2.6. *Sei $f \in RV_\alpha$. Dann gibt es eine langsam variierende Funktion L, sodass $f(t) = t^\alpha L(t)$.*

Beweis. Setze $L(t) = \frac{f(t)}{t^\alpha}$. Dann muss man nur noch zeigen, dass $L(t)$ langsam variierend ist:

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} = \frac{f(\lambda t) t^\alpha}{f(t)(\lambda t)^\alpha} = \lambda^{-\alpha} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} \to \lambda^{-\alpha} \cdot \lambda^{-\alpha} = 1, \qquad t \to +\infty,$$

da f nach Voraussetzung regulär variierend ist. Deshalb ist L langsam variierend. □

Theorem 2.7. *Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α mit $\alpha > 0$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$x^* = +\infty$.*
2. *Die Tailfunktion $\bar{F}$ ist regulär variierend mit Index $-\alpha$, d.h.*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(\lambda t)}{1 - F(t)} = \lambda^{-\alpha} \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Sind die beiden Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{a_n} \xrightarrow{d} \Phi_\alpha \text{ mit } a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

wobei $F^{\leftarrow}$ die Quantilfunktion von F bezeichnet:

$$F^{\leftarrow}(a) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq a\}, \qquad a \in (0,1).$$

Im Folgenden beweisen wir die Rückrichtung von Satz 2.7.

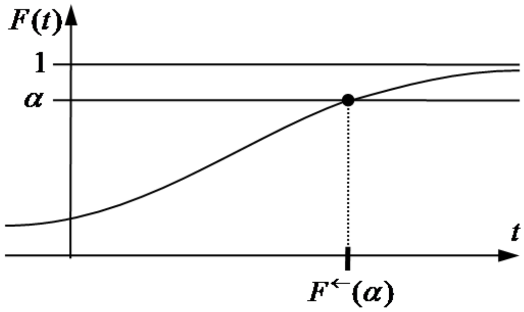

Abbildung 2.1: Veranschaulichung $F^{\leftarrow}(a)$.

Lemma 2.8. *Sei $x^* = \infty$ und $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1$.*

Beweis. Ist F streng monoton steigend und stetig, so gilt $F(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$, denn $F^{\leftarrow}$ ist dann die inverse Funktion von F. In diesem Fall ist die Aussage des Lemmas gültig, denn es ist sogar $n\bar{F}(a_n) = 1$. Leider gilt das im Fall eines beliebigen F nicht, wie die folgenden Bilder zeigen:

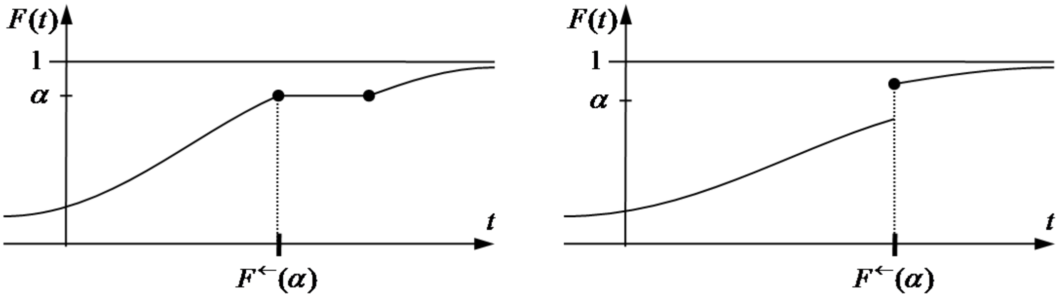

Abbildung 2.2: Problemfälle

Im allgemeinen Fall ist der Beweis etwas komplizierter. Wir zeigen zunächst, dass

$$F(a_n) = F\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \geq 1 - \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $F(a_n + \varepsilon) > 1 - \frac{1}{n}$. Lassen wir ε gegen Null gehen, so gilt $F(a_n + \varepsilon) \to F(a_n)$, weil F als Verteilungsfunktion rechtsstetig ist. Daraus ergibt sich (2.1). Damit folgt, dass $\bar{F}(a_n) \leq \frac{1}{n}$, woraus sich direkt ergibt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \leq 1. \tag{2.2}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \geq 1. \tag{2.3}$$

Sei dazu $x \in (0,1)$. Für n groß genug gilt $xa_n > 0$, denn $a_n \to \infty$. Es gilt außerdem $F(xa_n) < 1 - \frac{1}{n}$ nach Definition von a_n. Somit gilt:

$$n\bar{F}(xa_n) = n(1 - F(xa_n)) > n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Damit folgt unmittelbar:

$$n\bar{F}(a_n) = n\bar{F}(xa_n) \cdot \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} > \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} \to x^\alpha, \qquad n \to \infty,$$

da $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Es ergibt sich nun also, dass $\liminf_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \geq x^\alpha$ für alle $x \in (0,1)$. Wenn man nun x gegen 1 gehen lässt ergibt sich (2.3). Damit ist insgesamt $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1$ und das Lemma ist bewiesen. □

Beweis von Satz 2.7. Wir beweisen nur die Rückrichtung. Wir nehmen also an, dass $x^* = \infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$. Sei $t > 0$. Nach Lemma 2.8 gilt $n\bar{F}(a_n) \to 1$. Da $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist, ergibt sich

$$n\bar{F}(ta_n) = n\bar{F}(a_n) \cdot \frac{\bar{F}(ta_n)}{\bar{F}(a_n)} \to 1 \cdot t^{-\alpha} = t^{-\alpha}, \qquad n \to \infty.$$

Dadurch folgt:

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n}{a_n} \leq t\right] = (1 - \bar{F}(ta_n))^n \to e^{-t^{-\alpha}} = \Phi_\alpha(t), \qquad n \to \infty.$$

Deshalb gilt $\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Phi_\alpha$ für $n \to \infty$. □

2.2 Max-Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung Ψ_α

Der Max-Anzihungsbereich der Weibull-Verteilung Ψ_α hat eine ähnliche Charakterisierung wie der Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung. Der Unterschied ist, dass im Fall der Weibull-Verteilung der rechte Endpunkt x^* endlich sein muss. Damit eine Verteilungsfunktion F im Max-Anziehungsbereich von Ψ_α liegt, muss F in x^* im gewissen Sinne regulär variierend sein. Wir geben nun eine präzise Definition.

Definition 2.9. *Eine messbare Funktion $f : (0, A) \to (0, \infty)$ heißt regulär variierend in 0 mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\alpha \text{ für positive } \alpha.$$

Bezeichnung: $f \in RV_\alpha(0)$.

Beispiel 2.10. Die Funktion $f(t) = t^\alpha$ ist regulär variierend in 0 mit Index α.

Theorem 2.11. *Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt im Max-Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung Ψ_α, dann und nur dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$x^* < \infty$*
2. *Die Funktion $1 - F(x^* - t)$ ist regulär variierend in 0 mit Index α, d.h.*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - F(x^* - \lambda t)}{1 - F(x^* - t)} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Sind die Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - x^*}{a_n} \xrightarrow{d} \Psi_\alpha \text{ mit } a_n = x^* - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Beispiel 2.12. Betrachte die Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - (1 - t)^\alpha$ mit $t \in [0, 1]$ und $\alpha > 0$. Dann ist $x^* = 1$ und $1 - F(1 - t) = t^\alpha \in RV_\alpha(0)$.

Beweis von Satz 2.11. Wir beweisen wieder nur die Rückrichtung. Sei $x^* < \infty$ und $1 - F(x^* - t) \in RV_\alpha(0)$. Definiere $F^*(t) = F(x^* - \frac{1}{t}), t > 0$. Es ist leicht einzusehen, dass F^* auch eine Verteilungsfunktion ist. Betrachte

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F^*(\lambda t)}{1 - F^*(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(x^* - \frac{1}{\lambda t})}{1 - F(x^* - \frac{1}{t})} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1 - F(x^* - \frac{s}{\lambda})}{1 - F(x^* - s)} = \lambda^{-\alpha},$$

wobei wir die Substitution $t = 1/s$ benutzt haben. Es folgt, dass $F^* \in RV_{-\alpha}(\infty)$. Mit Theorem 2.7 folgt nun, dass F^* im Max-Anziehungsbereich von Φ_α liegt und

$$\lim_{n \to \infty} F^{*n}(a_n^* t) = e^{-1/t^\alpha}, t > 0, \text{ wobei } a_n^* = F^{*\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Deshalb gilt für alle $s = -1/t < 0$

$$\lim_{n \to \infty} F^n\left(x^* + \frac{s}{a_n^*}\right) = \lim_{n \to \infty} F^n\left(x^* - \frac{1}{a_n^* t}\right) = \lim_{n \to \infty} F^{*n}(a_n^* t) = e^{-t^{-\alpha}} = e^{-(-s)^\alpha},$$

was sich auch equivalent wie folgt ausdrücken lässt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[a_n^*(M_n - x^*) \leq s] = \Psi_\alpha(s), \text{ für alle } s < 0.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $a_n = \frac{1}{a_n^*}$:

$$a_n^* = F^{*\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \inf\left\{t : F^*(t) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\} = \inf\left\{t : F\left(x^* - \frac{1}{t}\right) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Substituiert man $x^* - \frac{1}{t}$ durch u, so ergibt sich

$$a_n^* = \inf\left\{\frac{1}{x^* - u} : F(u) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{x^* - \inf\{u : F(u) \geq 1 - \frac{1}{n}\}} = \frac{1}{x^* - F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})}.$$

Es ergibt sich also $a_n = 1/a_n^*$. □

2.3 Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung G

Theorem 2.13. *Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x^* liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung $G(t) = e^{-e^{-t}}$ genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion $g(t)$ gibt mit*

$$\lim_{t\uparrow x^*} \frac{\bar{F}(t + xg(t))}{\bar{F}(t)} = e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Ist die Bedingung erfrüllt, so gilt

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G$$

mit $b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ und $a_n = g(a_n)$.

Bemerkung 2.14. x^* kann endlich oder unendlich sein.

Beweis. Es wird hier nur ein Beweis für die Rückrichtung gegeben. Man betrachte dazu

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\bar{F}(a_n x + b_n)}{n\bar{F}(b_n)} = e^{-x},$$

denn es gilt $n\bar{F}(b_n) \to 1$ (Beweis ähnlich wie in Lemma 2.8). Es folgt

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] = F^n(a_n x + b_n) = (1 - \bar{F}(a_n x + b_n))^n = e^{-e^{-x}}.$$

Und dadurch folgt $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G$ für $n \to \infty$. $\square$

Beispiel 2.15. Wir haben bereits gesehen, dass die Exponentialverteilung mit $\bar{F}(t) = e^{-t}$, $t > 0$, im Max-Anziehungsbereich von G liegt. Man kann nachrechnen, dass Bedingung (2.4) mit $g(t) = 1$ erfüllt ist.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die Normalverteilung zum Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung gehört. Dazu benötigen wir ein Lemma.

Definition 2.16. *Zwei Funktionen f und g heißen asymptotisch equivalent (in $+\infty$), falls*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Bezeichnung: $f(t) \sim g(t)$ für $t \to +\infty$.

Lemma 2.17. *Für die Tailfunktion $\bar{F}$ der Standardnormalverteilung gilt*

$$\bar{F}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2} \text{ für } t \to +\infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\bar{F}(t)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty e^{-s^2/2} ds}{\frac{1}{t} e^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-t^2/2}}{-\frac{1}{t^2} e^{-t^2/2} - t\frac{1}{t} e^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^2} + 1} = 1,$$

wobei wir den Satz von L'Hospital für den Fall „$\frac{0}{0}$" angewendet haben. $\square$

Theorem 2.18. *Die Standardnormalverteilung liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung G.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass Bedingung (2.4) des Satzes 2.13 mit $g(t) = 1/t$ gilt. Mit Lemma 2.17 ergibt sich:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\bar{F}(t + xg(t))}{\bar{F}(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t+xg(t)} e^{-(t+xg(t))^2/2}}{\frac{1}{t} e^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t+x/t} e^{-t^2/2 - x - \frac{x^2}{2t^2}}}{\frac{1}{t} e^{-t^2/2}} = e^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Wir werden nun die Konstanten a_n und b_n so bestimmen, dass für das Maximum von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen gilt: $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G$ für $n \to \infty$. Laut Satz 2.13 sollten wir b_n so wählen, dass $n\bar{F}(b_n) = 1$. Da aber die Lösung dieser Gleichung keine explizite Darstellung besitzt, werden wir ein bißchen anders vorgehen. Wir werden b_n so wählen, dass $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(b_n) = 1$, was genau dann der Fall ist wenn

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} b_n} e^{-b_n^2/2} \sim \frac{1}{n}, \qquad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Auf der linken Seite scheint $e^{-b_n^2/2}$ derjenige Term zu sein, der am schnellsten gegen 0 geht. Wir können also als erste Annäherung b_n so wählen, dass $e^{-b_n^2/2} = 1/n$, d.h. $b_n = \sqrt{2 \log n}$. Dann ist aber $\frac{1}{\sqrt{2\pi} b_n} e^{-b_n^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log n}} \frac{1}{n}$ – also sind wir noch nicht am Ziel. Wir wählen also $b_n = \sqrt{2\log n} + \delta_n$, wobei δ_n noch genauer spezifiziert werden muss. Dann folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} b_n} e^{-b_n^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2\log n} + \delta_n)} e^{-\log n - \sqrt{2\log n}\delta_n - \frac{\delta_n^2}{2}}.$$

Wähle δ_n so dass $\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log n} = e^{-\sqrt{2\log n}\delta_n}$. Dann folgt durch umformen, dass $\delta_n = -\frac{1}{2\sqrt{2\log n}}(\log 4\pi + \log\log n)$. Es ist schließlich leicht nachzuweisen, dass mit

$$b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\log n}}$$

die gewünschte asymptotische Equivalenz (2.5) gilt. Als a_n wählt man schließlich

$$a_n = g(b_n) = \frac{1}{b_n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\log n}}.$$

Theorem 2.19. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und standardnormalverteilt. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sqrt{2\log n}\left\{M_n - \left(\sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\log n}}\right)\right\} \leq x\right] = e^{-e^{-x}}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 2.20. Der Satz lässt sich wie folgt interpretieren: das Maximum M_n nimmt Werte an, die sehr nah an $b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\log n}}$ sind. Die Differenz zwischen M_n und b_n ist von der Größenordnung $a_n = 1/\sqrt{2\log n}$. Reskaliert man $M_n - b_n$ mit dem Faktor $\sqrt{2\log n}$, so erhält eine approximativ Gumbel-verteilte Zufallsvariable.

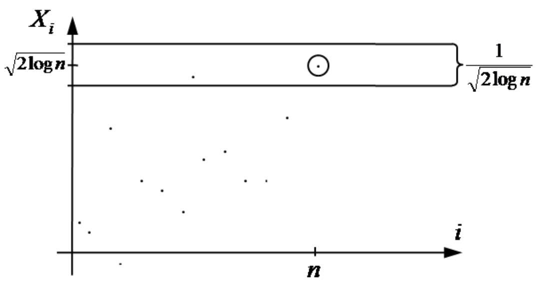

Abbildung 2.3: Maximum liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit im dargestellten Bereich