3 Satz von Fisher–Tippett

Theorem 3.1 (Satz von Fisher–Tippett; extremal types theorem)**.** *Eine Verteilung G ist eine Extremwertverteilung genau dann, wenn es $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$G(t) = G_\gamma(ct + d).$$

Dabei ist G_γ eine Verteilungsfunktion, die durch $G_\gamma(t) = \exp\left\{-(1+\gamma t)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}$ für $1+\gamma t > 0$ definiert ist.

Bemerkung 3.2.

1. Für $\gamma > 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Fréchet-Verteilung $\Phi_{1/\gamma}(t) = e^{-t^{-1/\gamma}}$, $t > 0$.

2. Für $\gamma < 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Weibull-Verteilung $\Psi_{-1/\gamma}(t) = e^{-(-t)^{-1/\gamma}}$, $t < 0$.

3. Für $\gamma = 0$ ist $(1+\gamma t)^{-\frac{1}{\gamma}}$ nicht wohl definiert. Wir interpretieren diesen Term dann als Grenzwert für $\gamma \to 0$:
$$\lim_{\gamma \to 0}(1+\gamma t)^{-\frac{1}{\gamma}} = e^{-t}.$$
Somit ist $G_0(t) = e^{-e^{-t}}$, $t \in \mathbb{R}$, die Gumbel-Verteilung.

Im Folgenden werden wir den Satz von Fisher–Tippett beweisen.

Lemma 3.3 (Khintchine)**.** *Seien $Z_1, Z_2, ...$ Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, ...$ Sei G eine Verteilungsfunktion und $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ Konstanten mit*

$$\frac{Z_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G \text{ für } n \to \infty.$$

Sei $\tilde{G}$ eine weitere Verteilungsfunktion und $\tilde{c}_n > 0, \tilde{d}_n \in \mathbb{R}$ Konstanten mit

$$\frac{Z_n - \tilde{d}_n}{\tilde{c}_n} \xrightarrow{d} \tilde{G} \text{ für } n \to \infty.$$

Seien zudem G und $\tilde{G}$ nicht degeneriert. Dann gibt es Konstanten $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ mit

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\tilde{c}_n} \text{ bzw. } d = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{d}_n - d_n}{c_n}$$

und es gilt: $\tilde{G} = G(ct + d)$.

Beweis. entfällt. □

Definition 3.4. *Eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G heißt max-stabil, falls es für alle natürlichen Zahlen n Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$G^n(c_n t + d_n) = G(t).$$

Beispiel 3.5. Die Gumbel-Verteilung $G(t) = e^{-e^{-t}}$ ist max-stabil, denn

$$G^n(t + \log n) = e^{-ne^{-(t+\log n)}} = e^{-e^{-t}} = G(t).$$

Analog lässt sich zeigen, dass Fréchet- und Weibull-Verteilung Φ_α und ψ_α max-stabil sind.

Proposition 3.6. *Eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G ist max-stabil dann und nur dann, wenn es eine Folge $F_1, F_2, ...$ von Verteilungsfunktionen und Konstanten $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle natürlichen Zahlen k gilt:*

$$F_n(c_{nk}t + d_{nk}) \xrightarrow{d} G^{1/k}(t). \tag{3.1}$$

Beweis. Zuerst soll (3.1) gelten, d.h. $F_n(c_{nk}t + d_{nk}) \xrightarrow{d} G^{1/k}(t)$. Mit $k = 1$ folgt $F_n(c_n t + d_n) \xrightarrow{d} G(t)$. Mit Lemma 3.3 folgt, dass es $\alpha_k > 0$ und $\beta_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $G^{1/k} = G(\alpha_k t + \beta_k)$. Daraus folgt schließlich, dass $G(t) = G^k(\alpha_k t + \beta_k)$ und somit G max-stabil ist.

Sei nun G als max-stabil vorgegeben. Wir zeigen, dass dann (3.1) gelten muss. Da G max-stabil ist, gibt es $c_k > 0, d_k \in \mathbb{R}$ mit $G^k(c_k t + d_k) = G(t)$. Setze nun $F_n = G^n$. Dann gilt:

$$F_n(c_{nk}t + d_{nk}) = G^n(c_{nk}t + d_{nk}) = (G^{nk}(c_{nk}t + d_{nk}))^{1/k} = G^{1/k}(t).$$

Somit gilt (3.1). □

Proposition 3.7. *Eine Verteilungsfunktion G ist max-stabil dann und nur dann, wenn G eine Extremwertverteilung ist.*

Beweis. Sei G max-stabil. Dann gibt es $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, so dass gilt $G^n(c_n t + d_n) = G(t)$. Es gilt also:

$$G^n(c_n t + d_n) \xrightarrow{d} G(t) \text{ für } n \to \infty,$$

weshalb G eine Extremwertverteilung ist.

Sei G nun eine Extremwertverteilung. Dann gibt es eine Verteilungsfunktion F und $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, sodass für $n \to \infty$ gilt:

$$F^n(c_n t + d_n) \xrightarrow{d} G(t)$$

und damit für alle natürlichen Zahlen k

$$F^{nk}(c_{nk}t + d_{nk}) \xrightarrow{d} G(t) \text{ bzw. } F^n(c_{nk}t + d_{nk}) \xrightarrow{d} G^{1/k}(t).$$

Mit Proposition 3.6 folgt schließlich, dass G max-stabil ist. □

Proposition 3.8. *Ist G max-stabil, so gibt es Funktionen $c(s) > 0, d(s) \in \mathbb{R}$, so dass für alle positiven reellen Zahlen s gilt:*

$$G^s(c(s)t + d(s)) = G(t). \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.9. Die Gleichung (3.2) ist deshalb stärker als die Gleichung aus Definition (3.4), weil s keine ganze Zahl sein muss. Für natürliche Zahlen s ist also nichts zu zeigen.

Beweis. Wir benötigen die folgende Notation: $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq t\}$.

Sei G max-stabil. Dann gibt es $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, sodass für alle natürlichen n $G^n(c_n t + d_n) = G(t)$ gilt. Für positive s folgt daraus $G^{[ns]}(c_{[ns]}t + d_{[ns]}) = G(t)$, womit sich direkt ergibt, dass

$$G^n(c_{[ns]}t + d_{[ns]}) = (G^{[ns]}(c_{[ns]}t + d_{[ns]}))^{\frac{n}{[ns]}} = G^{\frac{n}{[ns]}}(t) \xrightarrow{d} G^{1/s}(t) \text{ für } n \to \infty.$$

Gleichzeitig gilt aber auch $G^n(c_n t + d_n) \xrightarrow{d} G(t)$. Mit Lemma 3.3 folgt also, dass es Konstanten $c(s) > 0, d(s) \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$c(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{[ns]}}{c_n} \text{ und } d(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n - d_{[ns]}}{c_n}$$

und $G^{1/s}(t) = G(c(s)t + d(s))$. Insgesamt folgt also $G(t) = G^s(c(s)t + d(s))$. □

Theorem 3.10. *Eine max-stabile Verteilung G ist vom gleichen Typ wie eine der folgenden Verteilungen: Gumbel Λ, Fréchet Φ_α mit $\alpha > 0$ oder Weibull Ψ_α mit $\alpha > 0$.*

Bemerkung 3.11. Die Aussage des Satzes zusammen mit Proposition 3.7 impliziert den Satz von Fisher–Tippett.

Beweis. Nachzuweisen, dass die Gumbel, Fréchet und Weibull Verteilungen max-stabil sind, sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Im folgenden sei G also max-stabil. Wir beweisen, dass G dann vom gleichen Typ ist wie eine der drei genannten Verteilungen. Nach Proposition 3.8 gibt es im Falle der max-Stabilität von G Konstanten $c(s) > 0, d(s) \in \mathbb{R}$ mit $G^s(c(s)t + d(s)) = G(t)$ für alle positiven reellen Zahlen s. Diese Gleichung lässt sich durch Anwendung von $-\log$ auf beiden Seiten folgendermaßen umformen:

$$-s \log G(c(s)t + d(s)) = -\log G(t).$$

Nochmaliges Anwenden von $-\log$ auf beiden Seiten führt zu:

$$-\log(-\log G(c(s)t + d(s))) - \log s = -\log(-\log G(t)).$$

Mit $\psi(t) = -\log(-\log G(t))$ folgt

$$\psi(c(s)t + d(s)) - \log s = \psi(t).$$

Da G eine Verteilungsfunktion ist, folgt, dass ψ monoton steigend ist. Außerdem gilt:

$$\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\log(-\log 0) = -\infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\log(-\log 1) = \infty$$

Definiere $\mathcal{U}(y) = \psi^{\leftarrow}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} | \psi(t) \geq y\}$ als die verallgemeinerte Inverse von ψ. Dann ist

$$\mathcal{U}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} | \psi(t) \geq y\} = \inf\{t \in \mathbb{R} | \psi(c(s)t + d(s)) - \log s \geq y\}$$

mit $p = c(s)t + d(s)$ und entsprechend $t = \frac{p-d(s)}{c(s)}$ folgt:

$$\mathcal{U}(y) = \inf\left\{\frac{p-d(s)}{c(s)} \in \mathbb{R} | \psi(p) \geq y + \log s\right\} = \frac{\mathcal{U}(y+\log s) - d(s)}{c(s)} \text{ mit } y \in \mathbb{R}, s > 0.$$

Setzt man $y = 0$ so gilt $\mathcal{U}(0) = \frac{\mathcal{U}(\log s)-d(s)}{c(s)}$ und damit:

$$\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(0) = \frac{\mathcal{U}(y+\log s) - \mathcal{U}(\log s)}{c(s)}.$$

Ersetzt man schließlich $\log s$ durch z dann gilt:

$$\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(0) = \frac{\mathcal{U}(y+z) - \mathcal{U}(z)}{c(e^z)}.$$

Mit dieser Gleichung lässt sich nun die Behauptung beweisen. Dafür unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle

1. $c(e^z) \equiv 1$ und
2. $c(e^z) \neq 1$ für mindestens ein z.

Im ersten Fall $c(e^z) \equiv 1$ gilt: $\mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}(y+z) - \mathcal{U}(z)$. Definiert man $\tilde{\mathcal{U}}(y) = \mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(0)$ folgt $\tilde{\mathcal{U}}(y+z) - \tilde{\mathcal{U}}(z) = \tilde{\mathcal{U}}(y)$ und damit ist $\tilde{\mathcal{U}}(y+z) = \tilde{\mathcal{U}}(y) + \tilde{\mathcal{U}}(z)$. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Hamel-Gleichung, was zusammen mit dem Umstand, dass $\tilde{\mathcal{U}}$ monoton steigend ist impliziert, dass $\tilde{\mathcal{U}}(y) = \rho \cdot y$ für ein $\rho > 0$ gilt. Es folgt $\mathcal{U}(y) = \rho \cdot y + b$ mit $b = \mathcal{U}(0)$. Insgesamt ergibt sich also, dass in diesem Fall $\psi(t) = \frac{t-b}{\rho}$ und daher

$$G(t) = e^{-e^{-\psi(t)}} = e^{-e^{-\frac{t-b}{\rho}}}$$

vom gleichen Typ wie die Gumbel-Verteilung ist.

Im zweiten Fall gibt es ein z für das gilt $c(e^z) \neq 1$. Sei nun wieder $\tilde{\mathcal{U}}(y) = \mathcal{U}(y) - \mathcal{U}(0)$. Dann ist

$$\tilde{\mathcal{U}}(y+z) - \tilde{\mathcal{U}}(z) = c(e^z) - \tilde{\mathcal{U}}(y).$$

Vertauscht man hier y und z erhält man

$$\tilde{\mathcal{U}}(y+z) - \tilde{\mathcal{U}}(y) = c(e^y) - \tilde{\mathcal{U}}(z).$$

Subtrahiert man die beiden obigen Gleichungen erhält man

$$\tilde{\mathcal{U}}(y) = \tilde{\mathcal{U}}(z)\frac{1-c(e^y)}{1-c(e^z)}, \tag{3.3}$$

wobei hier wegen $c(e^z) \neq 1$ keine Division durch Null stattfinden kann. Setzt man nun

$\tilde{\mathcal{U}}(y) = f(z)(1 - c(e^y))$ mit $f(z) = \frac{\tilde{\mathcal{U}}(z)}{1-c(e^z)}$ in (3.3) ein, erhält man:

$$\tilde{\mathcal{U}}(y+z) = f(z)(1-c(e^z)) + c(e^z)f(z)(1-c(e^y)) = f(z) - f(z)c(e^z)c(e^y)$$

Hieraus ergibt sich schließlich:

$$c(e^{x+y}) = c(e^x) \cdot c(e^y)$$

Hierbei handelt es sich wieder um eine Hamel-Gleichung, die für $\rho \in \mathbb{R}$ durch $c(s) = s^\rho$ gelöst wird. Insgesamt ergibt sich damit

$$\mathcal{U}(y) = \mathcal{U}(0) + f(z)(1 - e^{\rho y}) = f \cdot (1 - e^{\rho y}) = \alpha + \beta e^{\rho y},$$

weil $f(z)$ konstant ist. Daher ist $\psi(z) = \frac{1}{\rho}\log(\frac{z-\alpha}{\beta})$ für $z > \alpha$, falls $\beta > 0$ bzw. für $z < \alpha$, falls $\beta < 0$. Dann ist

$$G(t) = e^{-e^{-\Phi(t)}} = \exp\left\{-(\frac{z-\alpha}{\beta})^{-1/\rho}\right\}.$$

Man kann beobachten, dass im Fall $z > \alpha$ (falls $\beta > 0$) G von gleichen Typ wie die Fréchet-Verteilung und im Fall $z < \alpha$ (falls $\beta < 0$) G vom gleichen Typ wie die Weibull-Verteilung ist. □