

5 Ordnungsstatistiken

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Ordnen wir die Stichprobe X_1, \dots, X_n monoton aufsteigend an, so erhalten wir die sogenannten Ordnungsstatistiken

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Zum Beispiel ist $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ und $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Wir benutzen die Notation

$$M_n^{(k)} = X_{n-k+1:n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Somit ist $M_n^{(1)} = X_{n:n}$ das größte Element der Stichprobe, $M_n^{(2)} = X_{n-1:n}$ das zweitgrößte Element und so weiter.

5.1 Extreme Ordnungsstatistiken

Wir haben die möglichen Grenzwertverteilungen von $M_n^{(1)}$ für $n \rightarrow \infty$ bereits beschrieben. Im Folgenden beschreiben wir die Grenzwertverteilungen von $M_n^{(k)}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest und $n \rightarrow \infty$.

Theorem 5.1. Sei $u_n \in \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau$, wobei $0 < \tau < \infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^n 1_{X_i > u_n} = k \right] = e^{-\tau} \frac{\tau^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $S_n := \sum_{i=1}^n 1_{X_i > u_n}$ die Anzahl der Beobachtungen, die oberhalb von u_n liegen. Es gilt $S_n \sim \text{Bin}(n, \bar{F}(u_n))$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau$. Da dies gilt, darf der Poissongrenzwertsatz angewendet werden:

$$S_n \xrightarrow{d} \text{Poi}(\tau) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Mit anderen Worten, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n = k] = e^{-\tau} \frac{\tau^k}{k!}$ für alle $k = 0, 1, \dots$ □

Theorem 5.2. *Es gebe Normierungsfolgen a_n und b_n , so dass*

$$\frac{M_n^{(1)} - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei G eine Extremwertverteilung ist. Dann gilt für alle $k = 1, 2, \dots$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{M_n^{(k)} - a_n}{b_n} \leq x \right] = \begin{cases} G(x) \cdot \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-\log G(x))^s}{s!}, & G(x) \neq 0 \\ 0, & G(x) = 0. \end{cases}$$

Beweis. Setzt man $u_n := a_n + b_n x$ und $S_n = \sum_{i=1}^n 1_{X_i > u_n}$ so ergibt sich:

$$\mathbb{P} [M_n^{(k)} \leq a_n + b_n x] = \mathbb{P}[S_n \leq k - 1] = \sum_{s=0}^{k-1} \mathbb{P}[S_n = s].$$

Mit Theorem 5.1 folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{k-1} \mathbb{P}[S_n = s] = \sum_{s=0}^{k-1} e^{-\tau} \frac{\tau^s}{s!} \quad (5.1)$$

mit $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n)$. Es bleibt also noch die Bestimmung von τ . Nach der Voraussetzung gilt:

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Deshalb gilt für geeignete reelle Folgen a_n, b_n

$$F^n(a_n + b_n x) \xrightarrow{d} G(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Für $G(x) \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \bar{F}(u_n)) = \log G(x).$$

Unter Verwendung der Taylorentwicklung des Logarithmus folgt schließlich $\lim_n n F(u_n) = -\log G(x)$. Deshalb gilt $\tau = -\log G(x)$. Einsetzen von τ in (5.1) liefert die Behauptung. \square

Im Folgenden beschreiben wir die Grenzwertverteilung des Vektors $(M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(r)})$, mit k fest und $n \rightarrow \infty$. Betrachte die Schwellenwerte $u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(r)}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n^{(1)}) = \tau_1, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n^{(r)}) = \tau_r, \text{ mit } 0 < \tau_1 \leq \dots \leq \tau_r < \infty.$$

Sei $S_n^{(k)} := \sum_{i=1}^n 1_{X_i > u_n^{(k)}}$ die Anzahl der Überschreitungen des Schwellenwerts $u_n^{(k)}$.

Theorem 5.3. Für alle $k_1, k_2, \dots, k_r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n^{(1)} = k_1, S_n^{(2)} = k_1 + k_2, \dots, S_n^{(r)} = k_1 + \dots + k_r] = \frac{\tau_1^{k_1}}{k_1!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{(\tau_r - \tau_{r-1})^{k_r}}{k_r!} e^{-\tau_r}.$$

Beweis. Definiere $p_{n,k} = \bar{F}(u_n^{(k)})$. Setzt man

$$P_n(k_1, \dots, k_n) = \mathbb{P}[S_n^{(1)} = k_1, S_n^{(2)} = k_1 + k_2, \dots, S_n^{(r)} = k_1 + \dots + k_r],$$

dann gilt

$$\begin{aligned} P_n(k_1, \dots, k_n) &= \binom{n}{k_1} p_{n,1}^{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} (p_{n,2} - p_{n,1})^{k_2} \cdot \\ &\quad \dots \cdot \binom{n - \sum_{i=1}^{r-1} k_i}{k_r} (p_{n,r} - p_{n,r-1})^{k_r} \cdot (1 - p_{n,r})^{n - \sum_{i=1}^r k_i}. \end{aligned}$$

Damit kann der Beweis faktorweise durchgeführt werden. Für den ersten Faktor gilt

$$\binom{n}{k_1} p_{n,1}^{k_1} = \frac{n(n-1) \dots (n-k_1+1)}{k_1!} \cdot \bar{F}(u_n^{(1)})^{k_1} \sim \frac{n^{k_1} \bar{F}(u_n^{(1)})^{k_1}}{k_1!} \rightarrow \frac{\tau_1^{k_1}}{k_1!}.$$

Ähnlich gilt für den zweiten Faktor

$$\binom{n-k_1}{k_2} (p_{n,2} - p_{n,1})^{k_2} \sim \frac{n^{k_2} (\bar{F}(u_n^{(2)}) - \bar{F}(u_n^{(1)}))^{k_2}}{k_2!} \rightarrow \frac{(\tau_2 - \tau_1)^{k_2}}{k_2!},$$

was sich nun analog für sämtliche Faktoren außer dem letzten fortführen lässt. Für den letzten Faktor gilt schließlich:

$$(1 - p_{n,r})^{n - k_1 - \dots - k_r} \rightarrow e^{-\tau_r}, \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

denn es gilt:

$$(n - k_1 - \dots - k_r) p_{n,r} = (n - k_1 - \dots - k_r) \bar{F}(u_n^{(r)}) \rightarrow \tau_r.$$

□

Nun können wir die gemeinsame Verteilung von $(M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(r)})$ beschreiben. Es gilt

$$\mathbb{P}[M_n^{(1)} \leq u_n^{(1)}, \dots, M_n^{(r)} \leq u_n^{(r)}] = \mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} \leq 1, S_n^{(3)} \leq 2, \dots, S_n^{(r)} \leq r-1].$$

Der Grenzwert der rechten Seite kann mit dem obigen Satz berechnet werden, was zu einer langen Formel führt. Im nächsten Satz betrachten wir den Spezialfall $r = 2$, d.h. wir

beschreiben die gemeinsame Grenzwertverteilung der zwei größten Werte der Stichprobe.

Theorem 5.4. *Es gebe Normierungsfolgen a_n und b_n , so dass*

$$\frac{M_n^{(1)} - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G, \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei G eine Extremwertverteilung ist. Dann gilt für alle $x_1 > x_2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{M_n^{(1)} - a_n}{b_n} \leq x_1, \frac{M_n^{(2)} - a_n}{b_n} \leq x_2 \right] = G(x_2)(\log G(x_1) - \log G(x_2) + 1)$$

falls $G(x_2) \neq 0$ und 0 sonst.

Beweis. Setze $u_n^{(1)} := a_n + b_n x_1$ bzw. $u_n^{(2)} := a_n + b_n x_2$. Es ergibt sich aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(a_n + b_n x) = -\log G(x)$$

dass $\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n^{(1)}) = -\log G(x_1) =: \tau_1$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n^{(2)}) = -\log G(x_2) =: \tau_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_n^{(1)} \leq u_n^{(1)}, M_n^{(2)} \leq u_n^{(2)}] &= \mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} \leq 1] \\ &= \mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 0] + \mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 1]. \end{aligned}$$

Mit Theorem 5.3 folgt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 0] + \mathbb{P}[S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 1]) = e^{-\tau_2} + (\tau_2 - \tau_1)e^{-\tau_2}.$$

□

5.2 Allgemeine Eigenschaften der Ordnungsstatistiken

Theorem 5.5. *Für alle $1 \leq k \leq n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{P}[X_{k:n} \leq t] = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} F(t)^m \bar{F}(t)^{n-m}.$$

Beweis. Setze $L := \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq t}$, dann gilt $L \sim \text{Bin}(n, F(t))$ und somit

$$\mathbb{P}[X_{k:n} \leq t] = \mathbb{P}[L \geq k] = \sum_{m=k}^n \mathbb{P}[L = m] = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} F(t)^m \bar{F}(t)^{n-m}.$$

□

Eine Zufallsvariable X heißt gleichverteilt auf $[0, 1]$, falls die Dichte von X gegeben ist durch $f_X(t) = 1_{[0,1]}(t)$.

Beispiel 5.6. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dann ist die Dichte von $X_{k:n}$ gegeben durch

$$f_{X_{k:n}}(t) = \begin{cases} k \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k}, & t \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt, $X_{k:n}$ hat eine Beta-Verteilung $\text{Beta}(k, n - k + 1)$.

Aufgabe 5.7. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X_{k:n} = \frac{k}{n+1}$.

Theorem 5.8. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f . Dann gilt für die gemeinsame Dichte von $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$:

$$f_{X_{1:n}, \dots, X_{n:n}}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} n! f(t_1) \cdots f(t_n), & t_1 < t_2 < \dots < t_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisidee. Es gibt $n!$ Anordnungen von X_1, \dots, X_n . □

Auch wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, sind die Ordnungsstatistiken $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ im Allgemeinen nicht unabhängig. Es gilt jedoch eine schwächere Eigenschaft, die sogenannte Markov-Eigenschaft.

Theorem 5.9 (Bedingte Unabhängigkeit von Ordnungsstatistiken). Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f . Die bedingte Dichte $f(u|x_1, \dots, x_n)$ von $X_{k+1:n}$ gegeben, dass $X_{1:n} = x_1, \dots, X_{k:n} = x_k$, stimmt mit der bedingten Dichte $f(u|x_k)$ von $X_{k+1:n}$ gegeben, dass $X_{k:n} = x_k$, überein.

Bemerkung 5.10. Angenommen, die ersten k Ordnungsstatistiken der Stichprobe X_1, \dots, X_n sind bekannt: $X_{1:n} = x_1, \dots, X_{k:n} = x_k$. Wo liegt nun die nächste Ordnungsstatistik $X_{k+1:n}$? Der obige Satz behauptet, dass für die Beantwortung dieser Frage nur der Wert $X_{k:n} = x_k$ relevant ist. Die Werte der vorherigen Ordnungsstatistiken x_1, \dots, x_{k-1} tauchen in der bedingten Verteilung von $X_{k+1:n}$ nicht auf.

Beweis. Sei $f_{1,\dots,k:n}$ die Dichte von $X_{1:n}, \dots, X_{k:n}$. Dann gilt

$$f(u|x_1, \dots, x_k) = \frac{f_{1,\dots,k+1:n}(u, x_1, \dots, x_k)}{f_{1,\dots,k:n}(x_1, \dots, x_k)}. \quad (5.2)$$

Sei $f_{k,k+1:n}$ die Dichte von $(X_{k:n}, X_{k+1:n})$ und $f_{k:n}$ die Dichte von $X_{k:n}$. Dann gilt

$$f(u|x_k) = \frac{f_{k,k+1:n}(x_k, u)}{f_{k:n}(x_k)}, \quad (5.3)$$

Es gilt:

$$f_{1,\dots,k:n}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_k) \cdot (1 - F(x_k))^{n-k} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

falls $x_1 < \dots < x_k$ und 0 sonst. Analog

$$f_{1,\dots,k+1:n}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_{k+1}) \cdot (1 - F(x_{k+1}))^{n-k-1} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)$$

falls $x_1 < \dots < x_{k+1}$ und 0 sonst. Außerdem gilt:

$$f_{k,k+1:n}(x_k, u) = f(x_k) \cdot f(u) \cdot F(x_k)^{k-1} (1 - F(u))^{n-k-1} \cdot n(n-1) \binom{n-2}{k-1}$$

bzw.

$$f_{k:n}(x_k) = f(x_k) \cdot F(x_k)^{k-1} (1 - F(x_k))^{n-k} \cdot n \binom{n-1}{k-1}.$$

Einsetzen in (5.2) bzw. (5.3) ergibt

$$(5.2) = (5.3) = \frac{(n-k)(1 - F(u))^{n-k-1} f(u)}{(1 - F(x_k))^{n-k}}.$$

□

Aufgabe 5.11. Seien X_1, \dots, X_n unabhängig exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche Verteilung besitzt $X_{k+1:n} - x_k$ gegeben, dass $X_{1:n} = x_1, \dots, X_{k:n} = x_k$?

5.3 Darstellungen der Ordnungsstatistiken

Eine Zufallsvariable Z heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls $\mathbb{P}[Z > t] = e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$. Die Ordnungsstatistiken der exponentialverteilten Zufallsvariablen besitzen eine besonders schöne Darstellung.

Theorem 5.12. Seien Z_1, \dots, Z_n unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Dann gilt

$$(Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1}, \dots, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1} + \dots + \frac{\nu_n}{1} \right),$$

wobei ν_1, \dots, ν_n unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ sind.

Bemerkung 5.13. Die Abstände $Z_{1:n}, Z_{2:n} - Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n} - Z_{n-1:n}$ sind somit unabhängig und (nicht identisch) exponentialverteilt:

$$Z_{k:n} - Z_{k-1:n} \stackrel{d}{=} \frac{\nu_k}{n-k+1} \sim \text{Exp}(n-k+1).$$

Aufgabe 5.14. Berechnen Sie mit dem obigen Satz $\mathbb{E}Z_{k:n}$, $\text{Var} Z_{k:n}$ und $\text{Cov}(Z_{k:n}, Z_{l:n})$.

Beweis. Die Dichte von $(Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n})$ ist gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \cdot e^{-x_1} \cdot \dots \cdot e^{-x_n}, & 0 < x_1 < \dots < x_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen Unabhängigkeit ist die Dichte von (ν_1, \dots, ν_n) ist gegeben durch

$$g(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} e^{-y_1} \cdot \dots \cdot e^{-y_n}, & y_i > 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die lineare Transformation

$$T : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_1}{n}, \frac{y_1}{n} + \frac{y_2}{n-1}, \dots, \frac{y_1}{n} + \frac{y_2}{n-1} + \dots + \frac{y_n}{1} \right) =: (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Die Jacobideterminante dieser Transformation ist

$$J := \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{n!}$$

Mit der Transformationsformel können wir die Dichte von $T(\nu_1, \dots, \nu_n)$ berechnen:

$$h(z_1, \dots, z_n) = n!g(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n!e^{-(y_1+\dots+y_n)} = n!e^{-(z_1+\dots+z_n)}, & 0 < z_1 < \dots < z_n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei obiger Transformation wurde die Dichte von (ν_1, \dots, ν_n) durch die Jacobideterminante geteilt um zur Dichte von $T(\nu_1, \dots, \nu_n)$ zu gelangen. Man sieht, dass die Dichte f von $(Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n})$ und die Dichte h von $T(\nu_1, \dots, \nu_n)$ übereinstimmen, was die Behauptung impliziert. \square

Die Ordnungsstatistiken der Zufallsvariablen, die gemäß einer Gleichverteilung verteilt sind, besitzen ebenfalls eine schöne Darstellung.

Theorem 5.15. *Seien U_1, \dots, U_n unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dann gilt:*

$$(U_{1:n}, \dots, U_{n:n}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}} \right),$$

wobei $S_k = \nu_1 + \dots + \nu_k$ und ν_1, \dots, ν_{n+1} unabhängige, mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariablen sind.

Bemerkung 5.16. Die Folge $S_1 < S_2 < \dots$ ist der Poisson-Prozess auf $(0, \infty)$ mit Intensität 1. Intuitiv kann man die Aussage des Satzes so verstehen, dass die ersten n Punkte S_1, \dots, S_n des Poisson-Prozesses gleichverteilt auf dem Intervall $[0, S_{n+1}]$ sind.

Beweis. Die Dichte von $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ ist gegeben durch:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n!, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte von $(\nu_1, \dots, \nu_{n+1})$ ist wegen Unabhängigkeit gegeben durch:

$$g(y_1, \dots, y_{n+1}) = \begin{cases} e^{-y_1} \cdot \dots \cdot e^{-y_{n+1}}, & y_i > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten die lineare Transformation

$$T : (y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + y_2 + \dots + y_{n+1}) =: (z_1, w_2, \dots, z_{n+1}).$$

Die Jacobideterminante von T ist

$$J_T := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Mit der Transformationsformel errechnen wir die Dichte von $(S_1, S_2, \dots, S_{n+1})$:

$$h(z_1, \dots, z_{n+1}) = \begin{cases} e^{-(y_1 + \dots + y_{n+1})} = e^{-z_{n+1}} & , 0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun betrachte wir eine weitere Transformation

$$S : (z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, z_{n+1} \right) =: (w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}).$$

Die Jacobideterminante von S ist

$$J_S(z_1, \dots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{z_{n+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_{n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{z_{n+1}} & 0 \\ \frac{-z_1}{z_{n+1}^2} & \frac{-z_2}{z_{n+1}^2} & \dots & \frac{-z_n}{z_{n+1}^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{z_{n+1}^n} = \frac{1}{w_{n+1}^n}.$$

Dichte von $(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}}, S_{n+1})$ kann nun mit der Transformationsformel wie folgt berechnet werden:

$$h(w_1, \dots, w_{n+1}) = \begin{cases} e^{-z_{n+1}} z_{n+1}^n = e^{-w_{n+1}} w_{n+1}^n, & 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < 1, w_{n+1} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte von $(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}})$ ist eine Marginaldichte von h :

$$r(w_1, \dots, w_n) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} h(w_1, \dots, w_{n+1}) dw_{n+1} = n!, & 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht, dass die Dichte f von $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ und die Dichte r von $(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}})$ übereinstimmen, woraus die Behauptung folgt. □