

7 Poisson-Punktprozesse

Poisson-Punktprozesse sind natürliche Modelle für zufällige Konfigurationen von Punkten im Raum. Wie der Name sagt, spielt die Poisson-Verteilung eine entscheidende Rolle. Wir werden also mit der Definition der Poisson-Verteilung anfangen.

7.1 Poisson-Verteilung

Man betrachte n Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p . Bezeichnet man mit $S_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge in diesen Experimenten, so ist $S_{n,p}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, d.h.

$$\mathbb{P}[S_{n,p} = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Der Poisson-Grenzwertsatz behandelt die Situation, in der die Anzahl der Experimente sehr groß, die Erfolgswahrscheinlichkeit jedoch sehr gering ist.

Theorem 7.1. *Es sei p_n eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$, wobei $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_{n,p_n} = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Definition 7.2. *Eine Zufallsvariable S heißt Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls*

$$\mathbb{P}[S = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Wir benutzen die Schreibweise $S \sim \text{Poi}(\lambda)$. Die obige Definition kann man etwas erweitern. Wir sagen, dass $S \sim \text{Poi}(0)$ falls $S = 0$ fast sicher. Außerdem sagen wir, dass $S \sim \text{Poi}(+\infty)$, falls $S = +\infty$ fast sicher.

7.2 Beispiel zu Poisson-Prozessen

Wir betrachten nun wieder eine sehr große Zahl von unabhängigen Experimenten mit sehr kleinen Erfolgswahrscheinlichkeiten. Diesmal stellen wir uns aber vor, dass jedes

Experiment außerdem eine Position im Raum besitzt. Die Positionen der Experimente, die mit einem Erfolg ausgehen, bilden eine zufällige Konfiguration von Punkten im Raum. Diese Konfiguration beschreibt man mit einem Poisson-Punktprozess.

Wir werden versuchen, ein stochastisches Modell für die Verteilung der Sterne im Himmel zu finden. Ist A ein Gebiet (ein Teil des Himmels), so bezeichnen wir mit $\pi(A)$ die Anzahl der Sterne in A . Diese Anzahl fassen wir als eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}_0 auf. Wir gehen davon aus, dass folgende Eigenschaft gilt:

Für disjunkte Gebiete A_1, \dots, A_n sind die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \dots, \pi(A_n)$ unabhängig.

Außerdem machen wir folgende Annahme. Ist Q ein kleines Gebiet mit Fläche $\epsilon \approx 0$, so gilt

$$\mathbb{P}[\text{“Es gibt einen Stern in } Q\text{”}] \approx \lambda\epsilon, \quad \epsilon \approx 0.$$

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, einen Stern in einem sehr kleinen Gebiet zu finden, ist proportional zum Flächeninhalt dieses Gebiets. Der Koeffizient $\lambda > 0$ beschreibt dabei die Intensität der Sterne im Himmel.

Wie ist nun $\pi(A)$ für ein beliebiges Gebiet A verteilt? Dazu unterteilen wir A in kleine Gebiete mit Fläche ϵ . Die Anzahl dieser Gebiete ist $\approx \text{Fläche}(A)/\epsilon$. Aus unseren Voraussetzungen und dem Poisson-Grenzwertsatz folgt, dass

$$\pi(A) \approx \text{Bin}\left(\frac{\text{Fläche}(A)}{\epsilon}, \lambda\epsilon\right) \approx \text{Poi}(\lambda \cdot \text{Fläche}(A)) \text{ für } \epsilon \downarrow 0.$$

Es gilt also:

Für jedes gebiet A ist $\pi(A)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda \cdot \text{Fläche}(A)$.

Eine zufällige Konfiguration von Punkten im Raum, die die beiden oben genannten Eigenschaften hat, bezeichnen wir als einen Poisson-Punktprozess.

7.3 Definition der Poisson-Prozesse

Wir werden nun eine mathematische Definition der Poisson-Punktprozesse geben.

7.3.1 Zählmaße

Die erste Frage ist, wie man eine “Punktekonfiguration” definiert. Wir bezeichnen mit \mathcal{B}^d die σ -Algebra der Borel-Mengen in \mathbb{R}^d und mit \mathcal{B}_0^d die Familie der beschränkten Borel-Mengen.

Definition 7.3. *Ein Maß μ auf \mathbb{R}^d heißt Zählmaß, falls für alle $A \in \mathcal{B}_0^d$, $\mu(A)$ eine nichtnegative ganze Zahl ist.*

Beispiel 7.4. Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Das Dirac-Maß δ_x ist definiert durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist δ_x ein Zählmaß. Man kann sich δ_x als eine Punktekongfiguration vorstellen, die aus einem Punkt x besteht. Etwas allgemeiner, jede endliche oder abzählbare Summe $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$, ist ein Zählmaß, wenn man zusätzlich fordert, dass die Folge x_1, x_2, \dots keine Häufungspunkte besitzt.

Beispiel 7.5. Kein Zählmaß hingegen ist: $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{1/n}$, denn hier ist $\mu([0, 1]) = \infty$.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jedes Zählmaß μ sich als

$$\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$$

darstellen lässt, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und x_1, x_2, \dots eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von Punkten in \mathbb{R}^d ist, die keine Häufungspunkte besitzt. Zählmaße sind somit (deterministische) Punktekongfigurationen ohne Häufungspunkte.

7.3.2 Punktprozesse

Wir wollen nun definieren, was eine *zufällige* Punktekongfiguration ohne Häufungspunkte (ein zufälliges Zählmaß) ist. Solche zufällige Punktekongfigurationen heißen Punktprozesse. Wir bezeichnen mit \mathbb{M} die Menge aller Zählmaße.

Definition 7.6. Sei $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{M}}$ definiert als die σ -Algebra erzeugt von Mengen der Form $\{\mu \in \mathbb{M} : \mu(A_i) = k_i, i = 1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^d$.

Definition 7.7. Ein Punktprozess ist eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nach $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$.

Bezeichnet π einen Punktprozess, so sei $\pi(A)$ definiert als die Anzahl der Punkte in einer Menge $A \in \mathcal{B}^d$. Somit ist $\pi(A)$ eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}_0 .

Beispiel 7.8. Es seien X_1, \dots, X_N u.i.v. Zufallsvektoren mit Werten in \mathbb{R}^d . Der Punktprozess

$$\pi = \sum_{i=1}^N \delta_{X_i}$$

wird der Binomialpunktprozess genannt, denn die Anzahl der Punkte in einer Menge $A \in \mathcal{B}^d$ ist binomialverteilt: $\pi(A) \sim \text{Bin}(N, \mathbb{P}[X_1 \in A])$.

7.3.3 Poisson-Punktprozesse

Definition 7.9. Sei μ ein Maß auf \mathbb{R}^d mit $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{B}_0^d$ (Radon-Maß). Ein Punktprozess π auf \mathbb{R}^d heißt *Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß μ* , falls folgende zwei Bedingungen gelten:

1. für alle $A \in \mathcal{B}^d$: $\pi(A) \sim \text{Poi}(\mu(A))$.
2. für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^d$ sind die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \dots, \pi(A_n)$ unabhängig.

Wir benutzen die Schreibweise $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$.

Bemerkung 7.10. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass $\mathbb{E}\pi(A) = \mu(A)$. Das Intensitätsmaß beschreibt also die erwartete Anzahl der Punkte in einem Poisson-Punktprozess.

Bemerkung 7.11. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, falls $\int_B |f(t)| dt < \infty$ für jede Menge $B \in \mathcal{B}_0^d$. Ist nun $f \geq 0$ eine lokal-integrierbare Funktion, so kann man ein Radon-Maß μ mit $\mu(B) = \int_B f(t) dt$ definieren. Die Funktion f heißt die Dichte von μ und wir schreiben $\mu(dt) = f(t) dt$. Einen Poisson-Punktprozess $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$ werden wir dann auch mit $\text{PPP}(f(t) dt)$ bezeichnen. Die Funktion f nennen wir dann die Intensität von π .

Beispiel 7.12. Im Beispiel mit dem Sternenhimmel haben wir einen Poisson-Punktprozess mit einer konstanten Intensität $f(t) = \lambda > 0$ betrachtet. Ein solcher Poisson-Punktprozess heißt *homogen*.

Beispiel 7.13. Seien E_1, E_2, \dots unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[E_i > t] = e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{E_1 + \dots + E_n}$ ein Poisson-Punktprozess mit Intensität $\lambda 1_{(0, \infty)}$. Um nun den eindimensionalen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität λ zu konstruieren, muss man auf die gleiche Weise unabhängig einen Poisson-Punktprozess auf $(-\infty, 0)$ erzeugen und die Vereinigung der beiden Punktprozesse nehmen.

7.4 Eigenschaften der Poisson-Punktprozesse

7.4.1 Superpositionssatz

Die Poisson-Verteilung ist faltungsstabil: sind $X_1 \sim \text{Poi}(\lambda_1), \dots, X_n \sim \text{Poi}(\lambda_n)$ unabhängige Zufallsvariablen, so gilt

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Wir beweisen, dass diese Eigenschaft auf unendliche Summen erweitert werden kann.

Theorem 7.14. Seien $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit $\lambda_i \in [0, \infty]$. Dann gilt:

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right).$$

Bemerkung 7.15. Wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$, dann gilt $S = \infty$ fast sicher.

Beweis. Sei $S_n = X_1 + \dots + X_n$ und $\sigma_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Bekannt ist bereits, dass $S_n \sim \text{Poi}(\sigma_n)$. Sei $r \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\{S_1 \leq r\} \supseteq \{S_2 \leq r\} \supseteq \dots \text{ und } \bigcap_{i=1}^{\infty} \{S_i \leq r\} = \{S \leq r\}$$

Deshalb gilt:

$$\mathbb{P}[S \leq r] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n \leq r] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^r e^{-\sigma_n} \frac{\sigma_n^k}{k!},$$

da $S_n \sim \text{Poi}(\sigma_n)$. Man kann hier zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\sigma_n \rightarrow \sigma$, $\sigma < \infty$. Dann gilt: $\mathbb{P}[S \leq r] = \sum_{k=0}^r e^{-\sigma} \frac{\sigma^k}{k!}$ und daher ist $S \sim \text{Poi}(\sigma)$.

Fall 2: $\sigma_n \rightarrow \infty$. Dann gilt: $\mathbb{P}[S \leq r] = 0$ und dann ist $S = \infty$ fast sicher.

□

Die Superposition $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots$ der Punktprozesse π_1, π_2, \dots ist die Vereinigung aller Punkte dieser Punktprozesse. Hierbei ist π nicht immer ein Zählmaß. Im nächsten Satz beweisen wir, dass die Superposition von unabhängigen Poisson-Punktprozessen wieder ein Poisson-Punktprozess ist.

Theorem 7.16. Seien $\pi_i \sim \text{PPP}(\mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Poisson-Punktprozesse. Ist $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ ein Radon-Maß, so gilt:

$$\pi := \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \sim \text{PPP}(\mu).$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{B}^d$. Es gilt $\pi_i(A) \sim \text{Poi}(\mu_i(A))$, weil $\pi_i \sim \text{PPP}(\mu_i)$. Mit Theorem 8.14 folgt

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A)\right) = \text{Poi}(\mu(A)),$$

Damit ist die Eigenschaft 1 aus der Definition gezeigt.

Seien nun $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^d$ disjunkt. Es gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$, dass

$$\pi_i(A_1), \dots, \pi_i(A_n) \text{ sind unabhängig, da } \pi_i \sim \text{PPP}(\mu_i).$$

Außerdem sind Punktprozesse π_1, π_2, \dots unabhängig. Es folgt, dass

$$\pi(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A_1), \dots, \pi(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A_n) \text{ unabhängig sind.}$$

Daher ist auch die zweite Eigenschaft aus der Definition nachgewiesen, woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 7.17. Aus $A \in \mathcal{B}_0^d$ folgt, dass $\pi(A) \sim \text{Poi}(\mu(A)) < \infty$, woraus folgt, dass π ein Punktprozess ist.

7.4.2 Abbildungssatz

Definition 7.18. Sei $T : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ eine Borel-Abbildung. Sei ν Maß auf \mathbb{R}^{d_1} . Das Bild von ν ist ein Maß $T\nu$ auf \mathbb{R}^{d_2} mit

$$(T\nu)(A) = \nu(T^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}^{d_2}.$$

Beispiel 7.19. Sei δ ein Zählmaß, mit $\delta = \sum_i \delta_{x_i}$. Dann ist $T\delta = \sum_i \delta_{Tx_i}$.

Beispiel 7.20. Wir konstruieren ein Radon-Maß ν und eine Abbildung T mit der Eigenschaft, dass $T\nu$ kein Radon-Maß ist. Sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(x, y) = x$ und sei ν Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^2 . Dann folgt $T\nu((a, b)) = \infty$ für alle $a < b$. Somit ist $T\nu$ kein Radon-Maß.

Theorem 7.21. Sei $T : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ eine Borel-Abbildung und $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$. Sei $T\mu$ ein Radon-Maß auf \mathbb{R}^{d_2} . Dann gilt $T\pi \sim \text{PPP}(T\mu)$.

Beweis. Wir überprüfen, ob die Bedingungen aus Definition 8.9 erfüllt sind. Sei $A \in \mathcal{B}^{d_2}$. Es gilt:

$$(T\pi)(A) = \pi(T^{-1}(A)) \sim \text{Poi}(\mu(T^{-1}(A))) = \text{Poi}((T\mu)(A)).$$

Für $A \in \mathcal{B}_0^{d_2}$ folgt außerdem, dass $(T\pi)(A) \sim \text{Poi}((T\mu)(A)) < \infty$ fast sicher, weshalb $T\pi$ ein Punktprozess ist.

Seien nun $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^{d_2}$ disjunkt, dann sind auch die Urbilder $T^{-1}(A_1), \dots, T^{-1}(A_n)$ disjunkt. Es folgt, dass die Zufallsvariablen $\pi(T^{-1}(A_1)), \dots, \pi(T^{-1}(A_n))$ unabhängig sind, da $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$. Deshalb sind die Zufallsvariablen $(T\pi)(A_1), \dots, (T\pi)(A_n)$ unabhängig. \square

7.4.3 Laplacefunktionale

Definition 7.22. Es sei $B(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller Borel-Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $B_+(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller $f \in B(\mathbb{R}^d)$ mit $f \geq 0$.

Definition 7.23. Sei π ein Punktprozess auf \mathbb{R}^d . Für $f \in B_+(\mathbb{R}^d)$ definiere die Zufallsvariable $S_f = \sum_{x \in \pi} f(x)$. Dann heißt

$$\psi_\pi : B(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty) \text{ mit } \psi_\pi(f) = \mathbb{E}[e^{-S_f}]$$

das Laplace-Funktional von π .

Im nächsten Satz berechnen wir das Laplace-Funktional eines Poisson-Prozesses.

Theorem 7.24. Sei π ein Poisson-Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit Intensität μ , dann ist

$$\mathbb{E}[e^{-S_f}] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) d\mu(x) \right\}. \quad (7.1)$$

Beweis. Schritt 1. (Indikatorfunktionen) Sei zuerst $f(x) = c \cdot 1_A(x)$, mit $c > 0$, $A \in \mathcal{B}_0^d$. Dann ist $S_f = c \cdot \pi(A)$. Es gilt $\pi(A) \sim \text{Poi}(\mu(A))$. Es folgt

$$\mathbb{E}[e^{-S_f}] = \mathbb{E}[e^{-c\pi(A)}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu(A)} \frac{\mu(A)^k}{k!} e^{-ck} = e^{-\mu(A)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu(A)e^{-c})^k}{k!} = e^{-\mu(A)(1-e^{-c})}.$$

Somit gilt die Behauptung für $f(x) = c \cdot 1_A(x)$.

Schritt 2. (Einfache Funktionen) Sei nun $f(x) = c_1 \cdot 1_{A_1}(x) + \dots + c_n \cdot 1_{A_n}(x)$ mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0^d$, disjunkt, und $c_1, \dots, c_n > 0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[e^{-S_f}] = \mathbb{E}[e^{-c_1\pi(A_1)} \cdot \dots \cdot e^{-c_n\pi(A_n)}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-c_i\pi(A_i)}],$$

da π ein Poisson-Punktprozess und daher die $\pi(A_i)$ unabhängig sind. Da wir die Gültigkeit der Behauptung für diese Art von Funktion bereits im ersten Schritt gezeigt haben, folgt:

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-c_i\pi(A_i)}] = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \mu(A_i)(1 - e^{-c_i}) \right\} = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) d\mu(x) \right\}.$$

Schritt 3. Sei nun $f \geq 0$ eine beliebige Borel-Funktion. Dann gibt es einfache Funktionen f_i , die punktweise von unten gegen f konvergieren. Da wir die Richtigkeit der

Behauptung für einfache Funktionen bereits bewiesen haben, folgt mit der Monotonen Konvergenz, dass sie auch für f gilt. \square

Bemerkung 7.25. Die Formel (8.1) gilt auch in folgender leicht allgemeiner Form:

$$\mathbb{E}[e^{-\theta S_f}] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-\theta f(x)}) d\mu(x) \right\}, \quad \theta \geq 0.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich nachweisen, indem man $\theta f(x)$ in (8.1) einsetzt.

Korollar 7.26 (Campbell). Sei $\pi \sim PPP(\mu)$ auf \mathbb{R}^d und $f \in B_+(\mathbb{R}^d)$, dann gilt:

$$\mathbb{E}[S_f] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x).$$

Beweis. Wegen Satz 8.24 gilt:

$$\mathbb{E}[S_f] = - \frac{d}{d\theta} \log \mathbb{E}[e^{\theta S_f}] \Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-\theta f(x)}) d\mu(x) \Big|_{\theta=0}.$$

Durch vertauschen von Integral und Ableitung lässt sich der Ausdruck wie folgt schreiben und vereinfachen:

$$\mathbb{E}[S_f] = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{d\theta} (1 - e^{-\theta f(x)}) d\mu(x) \Big|_{\theta=0} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x).$$

\square

Aufgabe 7.27. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[S_f^2] = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x).$$

Im nächsten Satz zeigen wir, dass man einen Poisson-Punktprozess an seinem Laplace-Funktional erkennen kann.

Theorem 7.28. Sei π ein Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit $\mathbb{E}[e^{-S_f}] = e^{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) d\mu(x)}$ für alle Funktionen $f \in B_+(\mathbb{R}^d)$ und ein Radon-Maß μ , dann ist $\pi \sim PPP(\mu)$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\pi(A) \sim \text{Poi}(\mu(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}^d$. Sei $f(x) = \theta 1_A(x)$ mit $\theta \geq 0$. Einsetzen liefert:

$$\mathbb{E}[e^{-\theta \pi(A)}] = \exp\{-\mu(A)(1 - e^{-\theta})\}, \quad \text{für alle } \theta \geq 0.$$

Da es sich bei $\exp\{-\mu(A)(1 - e^{-\theta})\}$ um die Laplace-Transformierte einer $\text{Poi}(\mu(A))$ -verteilten Zufallsvariable handelt, folgt mit der Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten, dass $\pi(A)$ Poisson-verteilt ist mit Intensität $\mu(A)$.

Seien nun $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^d$ disjunkt. Wir zeigen, dass dann $\pi(A_1), \dots, \pi(A_n)$ unabhängig sind. Sei

$$f(x) = \theta_1 1_{A_1}(x) + \dots + \theta_n 1_{A_n}(x), \text{ mit } \theta_1, \dots, \theta_n \geq 0.$$

Einsetzen liefert:

$$\mathbb{E}[e^{-\theta_1 \pi(A_1)} \dots e^{-\theta_n \pi(A_n)}] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) d\mu(x) \right\} = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \mu(A_i)(1 - e^{-\theta_i}) \right\}.$$

Weiterhin gilt:

$$\exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \mu(A_i)(1 - e^{-\theta_i}) \right\} = \prod_{i=1}^n e^{-\mu(A_i)(1 - e^{-\theta_i})} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-\theta_i \pi(A_i)}],$$

woraus folgt, dass $\pi(A_1), \dots, \pi(A_n)$ unabhängig sind. □

7.5 Markierungen von Poissonpunktprozessen

Sei π ein Poisson-Punktprozess mit Intensität μ auf \mathbb{R}^{d_1} . Erzeuge für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ eine Zufallsvariable m_x mit Werten in \mathbb{R}^{d_2} . Wir bezeichnen die Verteilung von m_x mit λ_x (λ_x ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}^{d_2} und darf von x abhängen). Wir brauchen folgende drei Annahmen:

1. $m_x, x \in \mathbb{R}^{d_1}$, sind unabhängige Zufallsvariablen.
2. $m_x, x \in \mathbb{R}^{d_1}$, sind unabhängig von π .
3. $x \mapsto \lambda_x(B)$ ist Borel-Funktion für alle $B \in \mathcal{B}^{d_2}$.

Wir definieren den markierten Poisson-Punktprozess π^* auf $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ wie folgt:

$$\pi^* = \sum_{x \in \pi} \delta_{(x, m_x)}$$

Die Schreibweise $x \in \pi$ bedeutet, dass die Summe über alle Punkte im Punktprozess π gebildet wird.

Theorem 7.29. π^* ist Poisson-Punktprozess mit Intensität μ^* auf $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$, wobei

$$\mu^*(C) = \iint_{(x,m) \in C} d\mu(x) \lambda_x(dm), \text{ für } C \in \mathcal{B}^{d_1+d_2}.$$

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ eine Borel-Funktion. Wir schreiben $S^* = \sum_{(x,m) \in \pi^*} f(x,m)$. Wir wollen zuerst folgenden bedingten Erwartungswert berechnen:

$$\mathbb{E}[e^{-S^*} | \pi] = \prod_{x \in \pi} \mathbb{E}[e^{-f(x,m_x)} | \pi] = \prod_{x \in \pi} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-f(x,m)} d\lambda_x(m).$$

Mit Hilfe einer einfachen Transformation lässt sich obiger Ausdruck wie folgt darstellen:

$$\prod_{x \in \pi} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-f(x,m)} d\lambda_x(m) = \exp \left\{ - \sum_{x \in \pi} - \log \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-f(x,m)} d\lambda_x(m) \right\} =: \exp \left\{ - \sum_{x \in \pi} f^*(x) \right\}.$$

Es folgt:

$$\mathbb{E}[e^{-S^*}] = \mathbb{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{x \in \pi} f^*(x) \right\} \right],$$

was sich mit Hilfe von Satz 8.24 wie folgt umformen lässt

$$\mathbb{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{x \in \pi} f^*(x) \right\} \right] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f^*(x)}) d\mu(x) \right\}.$$

Einsetzen von f^* liefert nun folgendes:

$$\exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f^*(x)}) d\mu(x) \right\} = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} (1 - e^{-f(x,m)}) d\mu(x) \lambda(dm) \right\},$$

wobei man $d\mu(x) \lambda(dm) = d\mu^*(x,m)$ setzt. Mit Satz 8.28 folgt schließlich, das π^* Poisson-Punktprozess mit Intensität μ^* ist. \square

Beispiel 7.30. Sei $\pi \sim \text{PPP}(\mu)$. Färbe die Punkte x des Poisson-Punktprozesses mit verschiedenen Farben ein, wobei gelten soll, dass x mit Wahrscheinlichkeit p_i mit Farbe $i \in \mathbb{N}$ gefärbt wird und sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren ($\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$). Alle Punkte werden unabhängig voneinander gefärbt. Sei π_i der Punktprozess der Punkte der Farbe i . Dann gilt $\pi_i \sim \text{PPP}(p_i \mu)$ und die Punktprozesse π_i , $i \in \mathbb{N}$, sind unabhängig.