8 Konvergenz von Punktprozessen

8.1 Definition der Konvergenz von Punktprozessen

Sei π ein Punktprozess und seien $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0^d$. Dann ist $(\pi(B_1), \dots, \pi(B_k))$ ein k-dimensionaler Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{N}_0^k$. Vektoren dieser Art heißen auch endlich-dimensionale Verteilungen von π.

Definition 8.1. *Seien $\pi, \pi_1, \pi_2, \dots$ Punktprozesse auf $\mathbb{R}^d$. Wir sagen, dass π_n gegen π in Verteilung konvergiert (Bezeichnung: $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi$), falls für alle $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0^d$ mit $\pi(\partial B_i) = 0$ fast sicher gilt*

$$(\pi_n(B_1), \dots, \pi_n(B_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\pi(B_1), \dots, \pi(B_k)).$$

Mit anderen Worten gilt für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\pi_n(B_1) = m_1, \dots, \pi_n(B_k) = m_k] = \mathbb{P}[\pi(B_1) = m_1, \dots, \pi(B_k) = m_k].$$

Warum in obiger Definition $\pi(\partial B_i) = 0$ fast sicher gelten muss, soll folgendes Beispiel veranschaulichen.

Beispiel 8.2. Sei $\pi_n = \delta_{1/n}$, $\pi = \delta_0$. Betrachten wir dazu denn Fall mit $k = 1$, $B = (0, 2)$, dann ist $\pi_n(B) = 1$ und $\pi(B) = 0$. Hätten wir die Forderung $\pi(\partial B_i) = 1$ f.s. weggelassen, so würde π_n nicht gegen π konvergieren. Das wäre sehr unnatürlich.

Definition 8.3. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger, falls es ein $R > 0$ gibt mit $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ mit $|t| > R$. Die Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger sei mit $C_c(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet. Es sei $C_c^+(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $f \geq 0$.*

Theorem 8.4. *Seien $\pi, \pi_1, \pi_2, \dots$ Punktprozesse auf $\mathbb{R}^d$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi$.
2. *für alle $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ gilt* $\sum_{x\in\pi_n} f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{x\in\pi} f(x)$.
3. *für alle $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi} f(x)\right\}\right].$$

Beweis. Weggelassen. □

8.2 Konvergenz der Überschreitungszeitpunkte gegen einen Poisson-Punktprozess

Theorem 8.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien ϵ_{ni}, $i \in \mathbb{Z}$, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\epsilon_{ni} = 1] = p_n$ bzw. $\mathbb{P}[\epsilon_{ni} = 0] = 1 - p_n$, wobei $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Dann gilt:*
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_{ni}\delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(\lambda dt).$$

Beweis. Für $f \in C_c^+(\mathbb{R})$ definieren wir
$$\phi_n(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\}\right] \text{ bzw. } \phi(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi} f(x)\right\}\right].$$

Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = \phi(f)$. Wegen der Unabhängigkeit von ϵ_{ni} gilt:
$$\phi_n(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_{ni} f\left(\frac{i}{n}\right)\right\}\right] = \mathbb{E}\prod_{i\in\mathbb{Z}} e^{-\epsilon_{ni} f(\frac{i}{n})} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{E} e^{-\epsilon_{ni} f(\frac{i}{n})} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} (1 + p_n(e^{-f(\frac{i}{n})} - 1)).$$

Mit der Ungleichung $|\log(1+x) - x| \le x^2/2$ ergibt sich
$$\log\phi_n(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \log(1 + p_n(e^{-f(\frac{i}{n})} - 1)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_n(e^{-f(\frac{i}{n})} - 1) + R_n,$$

wobei wir später zeigen werden, dass $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \log \phi_n(f) = \lim_{n\to\infty} (np_n) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (e^{-f(\frac{i}{n})} - 1) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{-f(t)} - 1)dt,$$

wobei letzteres einfach die Definition des Riemann-Integrals ist. Zusammenfassend gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = \exp\left\{-\lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-f(t)})dt\right\},$$

was der Laplace-Transformierte eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität λ entspricht. Mit Satz 8.4 folgt

$$\pi_n := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \epsilon_{ni}\delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\lambda dt).$$

Der Term R_n kann wie folgt abgeschätzt werden. Die Funktion f hat einen kompakten Träger, also verschwindet sie außerhalb eines Intervalls $[-A, A]$. Es folgt, dass höchstens $2An$ Werte von $f(i/n)$ ungleich 0 sind. Somit gilt

$$|R_n| \le \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_n^2 (e^{-f(\frac{i}{n})} - 1)^2 \le 2AnMp_n^2 = o(1),$$

wobei M das supremum von f ist. □

Theorem 8.6. *Seien X_i, $i \in \mathbb{Z}$, u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei u_n eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \lambda > 0$. Dann gilt*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}: X_i > u_n} \delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(\lambda).$$

Beweis. Sei $\epsilon_{ni} := 1_{X_i > u_n}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[\epsilon_{ni} = 1] = \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \lambda.$$

Damit sind die Bedingungen von Satz 8.5 erfüllt und es folgt die Behauptung. □

8.3 Konvergenz der oberen Ordnungsstatistiken gegen einen Poisson-Punktprozess

Theorem 8.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ u.i.v. Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^d$ und sei μ_n ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mu_n(B) = \mathbb{P}[Y_{n1} \in B]$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$. Sei μ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $\lim_{n\to\infty} n\mu_n(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}_0^d$ mit $\mu(\partial B) = 0$. Dann gilt*

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_{ni}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(\mu) =: \pi.$$

Beweis. Sei $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi_n(f) := \mathbb{E} \exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\} = \mathbb{E} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} f(Y_{ni})\right\} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{n} e^{-f(Y_{ni})}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Y_{ni} kann man diesen Ausdruck wie folgt schreiben:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E} e^{-f(Y_{ni})} = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-f(t)} d\mu_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(t)}) n d\mu_n(t)}{n}\right).$$

Wegen $n\mu_n(t) \to \mu(t)$ für $n \to \infty$ folgt schließlich:

$$\left(1 - \frac{\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(t)}) n d\mu_n(t)}{n}\right)^n \to \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(t)}) d\mu(t)\right\},$$

was die Laplace-Transformierte eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität μ ist. Mit Satz 8.4 folgt $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mu)$. □

Theorem 8.8. *Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung $e^{-e^{-x}}$, d.h. es gibt Folgen a_n, b_n mit*

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} e^{-e^{-x}}. \tag{8.1}$$

Dann gilt:

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i - a_n}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(e^{-t}dt) =: \pi.$$

Bemerkung 8.9. Es gilt:

$$\pi(\mathbb{R}^+) \sim \text{Poi}\left(\int_0^\infty e^{-t}dt\right) = \text{Poi}(1) < \infty \text{ fast sicher}$$

und

$$\pi(\mathbb{R}^-) \sim \text{Poi}\left(\int_{-\infty}^0 e^{-t}dt\right) = \text{Poi}(\infty) = \infty \text{ fast sicher.}$$

Beweis. Es gilt: (8.1) ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[X_1 > a_n + tb_n] = e^{-t}$. Wir definieren $Y_{ni} := \frac{X_i - a_n}{b_n}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\mu_n(B) := \mathbb{P}[Y_{n1} \in B]$ für $B \in \mathcal{B}^1$. Dann gilt für Mengen B der Form $[t, \infty)$:

$$n \cdot \mu_n([t,\infty)) = n \cdot \mathbb{P}[Y_{n1} \geq t] = n \cdot \mathbb{P}\left[\frac{X_1 - a_n}{b_n} \geq t\right] \to e^{-t}, n \to \infty,$$

da die Zufallsvariablen im Max-Anziehungsbereich der Gumbelverteilung liegen. Betrachten wir als nächstes Mengen B der Form $[t_1, t_2)$:

$$n \cdot \mu_n([t_1,t_2)) = n \cdot \mu_n([t_1,\infty)) - n \cdot \mu_n([t_2,\infty)) \to e^{-t_1} - e^{-t_2}, n \to \infty,$$

aus dem selben Grund wie zuvor. Es folgt:

$$e^{-t_1} - e^{-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-t}dt = \mu([t_1,t_2)).$$

Dieser Beweislogik folgend lässt sich die Konvergenz auch für beliebige Mengen $B \in \mathcal{B}_0^1$ zeigen, worauf wir hier verzichten wollen. Es folgt:

$$n\mu_n(B) \to \mu(B) \text{ für } n \to \infty \text{ für alle } B \in \mathcal{B}_0^1.$$

Mit Satz 8.7 folgt die Behauptung. □

Beispiel 8.10. Seien X_i unabhängige und identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1, d.h. $\mathbb{P}[X_i > t] = e^{-t}$ für $t > 0$. Dann gilt nach Satz **??**

$$\max\{X_1, \ldots, X_n\} - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{d} e^{-e^{-x}}.$$

Mit Satz 8.8 folgt nun

$$\sum_{i=1}^n \delta_{X_i - \log n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}(e^{-t}dt).$$

Beispiel 8.11. Seien X_i unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann haben wir bereits gezeigt, dass gilt:

$$\sqrt{2\log n}(\max\{X_1,\ldots,X_n\}-a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} e^{-e^{-x}}$$

mit $a_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\frac{1}{2}\log\log n + \log 2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\log n}}$. Es folgt mit Satz 8.8:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{(X_i-a_n)\sqrt{2\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(e^{-t}dt).$$

Im Kapitel Ordnungsstatistiken haben für selbige folgende Notation eingeführt, die wir nachfolgend wieder verwenden wollen:

$$M_n^{(k)} = X_{n-k+1:n}, \qquad k=1,\ldots,n.$$

Korollar 8.12. *Seien* $e_1, e_2, \ldots$ *unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit* $\mathbb{P}[e_i > t] = e^{-t}$ *für* $t > 0$. *Definiere* $P_k = e_1 + \ldots + e_k$, *dann gilt für alle* $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{M_n^{(1)}-a_n}{b_n},\ldots,\frac{M_n^{(k)}-a_n}{b_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (-\log P_1,\ldots,-\log P_k)\,.$$

Für den Beweis des Satzes wird folgende Eigenschaft des Poisson-Punktprozess als bekannt vorausgesetzt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{P_i} \sim \mathrm{PPP}(1) \text{ auf } (0,\infty).$$

Beweis. Es ist $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu) =: \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{U_i}$ mit $\mu = e^{-t}dt$ und $U_1 > U_2 > \ldots$. Aus Satz 8.8 folgt:

$$\left(\frac{M_n^{(1)}-a_n}{b_n},\ldots,\frac{M_n^{(n)}-a_n}{b_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (U_1,\ldots,U_k)\,.$$

Es ist also noch zu zeigen, dass gilt: $(U_1,\ldots,U_k) \stackrel{d}{=} (-\log P_1,\ldots,-\log P_k)\,,$ was sich auch äquivalent wie folgt formulieren lässt:

$$T(P_1), T(P_2)\ldots \sim \mathrm{PPP}(e^{-t}dt), \text{ mit } T(t) = -\log(t).$$

Sei dazu ν definiert als das Lebesgue-Maß auf $(0,\infty)$, dann ist

$$P_1, P_2, \ldots \sim \mathrm{PPP}(\nu).$$

Mit dem Transformationssatz für Poisson-Punktprozesse folgt:

$$TP_1, TP_2, \ldots \sim \mathrm{PPP}(T\nu).$$

Wir wollen nun noch nachweisen, dass $T\nu$ mit μ übereinstimmt um den Beweis abzuschließen:

$$T\nu((a,b)) = \nu T^{-1}(a,b) = \nu((e^{-b}, e^{-a})) = e^{-a} - e^{-b} = \mu((a,b)).$$

Es gilt also $T\nu = \mu$ und deshalb folgt die Behauptung. □

Theorem 8.13. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α, d.h.*

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha(t) = e^{-t^{-\alpha}}, \qquad t > 0. \tag{8.2}$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i - a_n}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt\right) \text{ auf } (0,\infty).$$

Beweis. Bedingung (8.2) ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[X_1 \geq b_n t] = \frac{1}{t^\alpha}$ für alle $t > 0$. Wir definieren $Y_{ni} = \frac{X_i}{b_n} 1_{X_i > 0}$. Dann ist das Maß μ_n auf $(0,\infty)$ die Verteilung von Y_{ni}. Betrachten wir zuerst Mengen der Form $[t,\infty)$:

$$n\mu_n([t,\infty)) = n\mathbb{P}[Y_{ni} \geq t] = n\mathbb{P}[X_1 \geq tb_n] \to \frac{1}{t^\alpha}, \qquad n \to \infty,$$

weil die Zufallsvariablen im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung sind. Betrachten wir nun Mengen der Form $[t_1, t_2)$ mit $t_1, t_2 > 0$:

$$n\mu_n([t_1,t_2)) = n\mu_n([t_1,\infty)) - n\mu_n([t_2,\infty)) \to \frac{1}{t_1^\alpha} - \frac{1}{t_2^\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt$$

aus dem selben Grund wie zuvor. Dieser Beweislogik folgend lässt sich die Konvergenz auch für beliebige Mengen $B \in \mathcal{B}_0^1$ zeigen, worauf wir hier verzichten wollen. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_n(B) = \int_B \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt \text{ für alle } B \in \mathcal{B}_0^1.$$

Damit ist Satz 8.7 anwendbar ist und die Behauptung ist bewiesen. □

Beispiel 8.14. Seien X_i u.i.v. Pareto-verteilt mit Parameter α, d.h. $\mathbb{P}[X_i > t] = \frac{1}{t^\alpha}$ für alle $t > 1$. Wir haben in Satz **??** bereits nachgewiesen, dass Pareto-verteilte Zufallsvariablem im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung liegen, d.h.

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha.$$

Mit Satz 8.13 gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i}{n^{1/\alpha}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt\right).$$

Theorem 8.15. *Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. aus dem Max-Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung, d.h. der rechte Endpunkt x^* sei endlich und*

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - x^*}{b_n} \to \Psi_\alpha(t) = e^{-(-t)^\alpha}, \qquad t < 0.$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i - x^*}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(\alpha(-t)^{\alpha-1} dt) \ \mathit{auf}\ (-\infty, 0).$$

Beweis. Beweis entfällt. □

Beispiel 8.16. Seien X_i unabhängig und identisch gleichverteilt auf $[0, 1]$. Es gilt:

$$n(\max\{X_1, \dots, X_n\} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{d} e^x = \Psi_1(x), \qquad x < 0$$

Dann folgt aus Satz 8.15

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{(X_i - 1)n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(dt) \text{ auf } (-\infty, 0).$$

8.4 Konvergenz der Rekordzeiten gegen einen Poisson-Punktprozess

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. mit stetiger Verteilungsfunktion F. Wie gehabt benutzen wir die Notation $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ für das Maximum der ersten n Zufallsvariablen bzw. $\xi_j = 1_{X_j > M_{j-1}}, j = 1, 2, \dots$ für die Indikatorvariable des Ereignisses, dass zum Zeitpunkt j ein neuer Rekord aufgestellt wird. Die ebenfalls bereits behandelten Rekordzeiten $L(1), L(2), \dots$ werden weiterhin wie folgt definiert: $L(1) = 1$ und

$$L(n + 1) = \min\{j > L(n) : \xi_j = 1\}.$$

Theorem 8.17. *Es gilt*

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{L(i)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} PPP(dt/t) \ \textit{auf}\ (0,\infty).$$

Beweis. Sei $f \in C_c^+(0,\infty)$. Es gilt

$$\phi_n(f) := \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{L(i)}{n}\right)\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\},$$

weil ξ_j immer dann 0 ist, wenn kein neuer Rekord an Stelle j vorliegt. Man kann obiges auch wie folgt schreiben und wegen der Unabhängigkeit der ξ_j nach Satz von Rényi umformen:

$$\phi_n(f) = \mathbb{E}\prod_{j=1}^{\infty}\exp\left\{-\xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\} = \prod_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\exp\left\{-\xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j}+\frac{1}{j}e^{-f(\frac{j}{n})}\right),$$

wobei sich die letzte Gleichheit ergibt, da ebenfalls mit dem Satz von Rényi gilt $\mathbb{P}[\xi_j = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_j = 0] = \frac{1}{j}$. Es folgt:

$$\log\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{j}\left(e^{-f(\frac{j}{n})}-1\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(e^{-f(\frac{j}{n})}-1\right) + \text{ Rest},$$

dabei nutzen wir die Taylorentwicklung von $\log(1+x) = x + \text{Rest}$ aus, wobei der Rest hier gegen 0 geht für $n \to \infty$. Definiert man

$$g\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{j/n}\left(e^{-f(\frac{j}{n})}-1\right)$$

und lässt n gegen unendlich gehen folgt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{j}\left(e^{-f(\frac{j}{n})}-1\right) + \text{ Rest } \to \int_0^{\infty} g(t)dt = \int_0^{\infty}\left(e^{-f(t)}-1\right)\frac{dt}{t}.$$

Die Konvergenz von der Reihe zum Integral ergibt sich hier direkt aus der Definition des Riemann-Integrals. Schließlich ist zu beobachten

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) = \exp\left\{-\int_0^{\infty}\left(e^{-f(t)}-1\right)\frac{dt}{t}\right\},$$

was die Laplace-Transformierte eines Poisson-Punktprozess mit Intensität $\frac{dt}{t}$ ist. Es folgt die Behauptung. □

8.5 Extremwertprozess

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Es gilt $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \ldots$.

Theorem 8.18. *Seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, mit $t_i \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Die Verteilung von $(M_{t_1}, \ldots, M_{t_n})$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[M_{t_1} \leq x_1, \ldots, M_{t_k} \leq x_k] \\ &= F^{t_k - t_{k-1}}(x_k) F^{t_{k-1} - t_{k-2}}(\min\{x_{k-1}, x_k\}) \cdot \ldots \cdot F^{t_{k-1} - t_{k-2}}(\min\{x_1, \ldots, x_k\}).\end{aligned}$$

Bemerkung 8.19. Es gilt die Markov-Eigenschaft:

$$\mathbb{P}[M_{n+1} \leq u | M_1 = m_1, \ldots, M_n = m_n] = \mathbb{P}[M_{n+1} \leq u | M_n = m_n].$$

Theorem 8.20. *Sei $\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(X_k, Y_k)} \sim PPP(\mu)$ auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit*

$$\mu([a, b] \times [c, d]) = (b - a) \cdot (\log F(d) - \log F(c)).$$

Sei $Z_t = \sup\{Y_k : X_k \leq t\}$ mit $t \geq 0$. Dann gilt

$$(M_t)_{t \in \mathbb{N}} \stackrel{d}{=} (Z_t)_{t \in \mathbb{N}}.$$

Der obige Satz zeigt, dass man den Maximumsprozess $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$ in einen sog. Extremwertprozess $(Z_t)_{t \geq 0}$ in stetiger Zeit einbetten kann.

Beweis. Sei $t_1 < t_2 < \ldots < t_k, t_i \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\mathbb{P}[Z_{t_1} \leq u_1, \ldots, Z_{t_k} \leq u_k] = \mathbb{P}[\pi(A_j) = 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, k] = \mathbb{P}\left[\pi\left(\cup_{j=1}^n A_j\right) = 0\right],$$

wobei hier $A_j = [t_{j-1}, t_j] \times (\min\{u_k, u_{k-1}, \ldots, u_j\}, \infty)$ ist. Obiges lässt sich, da π Poisson-Punktprozess ist, zu Folgendem vereinfachen:

$$e^{-\mu\left(\cup_{j=1}^k A_j\right)} = \prod_{j=1}^{k} e^{-\mu(A_j)} = \prod_{j=1}^{k} e^{(t_j - t_{j-1}) \log F(\min\{u_k, u_{k-1}, \ldots, u_j\})} = \mathbb{P}[M_{t_1} \leq u_1, \ldots, M_{t_k} \leq u_k].$$

□