

Stochastik III – Übungsblatt 1

Abgabe: 2. November 2011, vor den Übungen

Aufgabe 1

(3)

Weise nach, dass die multivariate Normalverteilung faltungsstabil ist, d.h. zeige, dass für $m \in \mathbb{N}$ unabhängige n -dimensionale Zufallsvektoren $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_{X_i}, K_{X_i})$, $i = 1, \dots, m$, gilt: $X_1 + \dots + X_m \sim \mathcal{N}(\mu_{X_1} + \dots + \mu_{X_m}, K_{X_1} + \dots + K_{X_m})$.

Aufgabe 2

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $K = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und nichtnegativ definit.

- Berechne den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix von X . (3)
- Zeige, dass ein beliebiger Teilvektor von X auch normalverteilt ist, wobei der Erwartungswertvektor der entsprechende Teilvektor von μ ist und die Kovarianzmatrix die entsprechende Teilmatrix von K . (2)
- Zeige, dass für $i \neq j$ die Zufallsvariablen X_i und X_j genau dann unabhängig sind, wenn $k_{ij} = 0$ ist. (2)
- Sei $\mu = 0$. Zeige, dass für beliebige $i, j, l, m \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\mathbb{E}(X_i X_j X_l) = 0$ und $\mathbb{E}(X_i X_j X_l X_m) = k_{ij} k_{lm} + k_{il} k_{jm} + k_{im} k_{jl}$. (3)

Hinweis: Für $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}_0$ mit $r = j_1 + \dots + j_n$ gilt: $\mathbb{E}(X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = i^{-r} \frac{\partial^r \varphi(t)}{\partial t_1^{j_1} \dots \partial t_n^{j_n}} \Big|_{t=0}$ wobei φ die charakteristische Funktion von X bezeichnet.

Aufgabe 3

(2)

Gib ein Beispiel für zwei (reellwertige) normalverteilte Zufallsvariablen X und Y , so dass der Vektor $(X, Y)^\top$ nicht multivariat normalverteilt ist (auch nicht singular).

Aufgabe 4

Sei $X = (X_1, X_2, X_3)^\top$ multivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor $\mu = (1, 2, 3)^\top$

und Kovarianzmatrix $K = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 2 \end{pmatrix}$.

- Bestimme die Verteilungen von X_2 und (X_1, X_3) . (2)
- Für welchen Wert von ρ sind die Zufallsvariablen $X_1 + X_2 + X_3$ und $X_1 - X_2 - X_3$ unabhängig? (3)