Prof. Dr. E. Spodarev
W. Karcher

Wintersemester 2011 / 2012
2. November 2011

Stochastik III – Übungsblatt 2

Abgabe: 16. November 2011, vor den Übungen

Aufgabe 1

a) Sei $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, I_3)$ ein normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\mu = (1, 7, -5)^\top$. Bestimme die Verteilung von $\frac{1}{2}Z_1^2 + Z_2^2 + \frac{1}{2}Z_3^2 - Z_1Z_3$. (3)

b) Sei $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ ein normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\mu = (1, -3, 2)^\top$ und Kovarianzmatrix (4)

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Verteilung von $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2Z_1Z_2 - 2Z_1Z_3 - 2Z_2Z_3$.

Aufgabe 2

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, I_n)$ multivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix I_n.

a) Bestimme die charakteristische Funktion von $X^\top X$. (2)

b) Berechne den Erwartungswert von $X^\top X$. (2)

c) Berechne die Varianz von $X^\top X$. (2)

Aufgabe 3 (4)

Die Zufallsvariablen U und V seien unabhängig, wobei $U \sim \chi^2_{m,\mu}$ (nicht-zentrale χ^2-Verteilung) und $V \sim \chi^2_n$ (zentrale χ^2-Verteilung). Man sagt, dass die Zufallsvariable $W = (U/m)/(V/n)$ in diesem Fall eine nichtzentrale F-Verteilung mit (m, n) Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter (NZP) μ hat. Zeige, dass die Dichte von W gegeben ist durch

$$f(x) = e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mu}{2}\right)^j \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + j) m^{\frac{m}{2}+j} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}+j-1}}{j! \Gamma(\frac{m}{2} + j)\Gamma(\frac{n}{2})(n + mx)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+j}}$$

für $0 < x < \infty$ und $f(x) = 0$ sonst.

Hinweis: $\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt$, $r > 0$.

Aufgabe 4 (5)

Zeige, dass die nichtzentrale F-Verteilung mit (m, n) Freiheitsgraden, NZP μ und Verteilungsfunktion $F_{m,n,\mu}$ asymptotisch durch eine zentrale χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden und Verteilungsfunktion χ^2_n in der folgenden Form darstellt werden kann:

$$\lim_{m\to\infty} F_{m,n,\mu}(x) = \left(1 - \chi^2_n\left(\frac{n}{x}\right)\right) I_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige hierfür zunächst, dass für eine Zufallsvariable $U \sim \chi^2_{m,\mu}$ gilt: $U \stackrel{d}{=} U' + R$ mit unabhängigen Zufallsvariablen U' und R, wobei $U' \sim \chi^2_{m-1}$ und $R \sim \chi^2_{1,\mu}$.