Prof. Dr. E. Spodarev
W. Karcher

Wintersemester 2011 / 2012
14. Dezember 2011

Stochastik III – Übungsblatt 5

Abgabe: 11. Januar 2012, vor den Übungen

Aufgabe 1 (2)

Sei ein lineares Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ gegeben, wobei X eine $n \times m$ - Matrix mit $\operatorname{rg}(X) = r < m$ ist. Sei $a \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Funktion $a^\top \beta$ genau dann erwartungstreu schätzbar ist, wenn gilt: $a^\top X^- X = a^\top$.

Aufgabe 2

Betrachte folgendes lineare Modell:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$ erwartungstreu schätzbar ist. (2)

b) Bestimme den besten linearen erwartungstreuen Schätzer für $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$. (3)

Aufgabe 3 (3)

Betrachte das lineare Modell

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

mit $Y \in \mathbb{R}^6$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_4)^\top \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^6$, $\mathbb{E}\varepsilon = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \delta_{ij}\sigma^2$, $\forall i, j = 1, \ldots, l$, $\sigma^2 > 0$ und Designmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Menge aller erwartungstreu schätzbaren Funktionen gegeben ist durch

$$\{(a_1 + a_2 + a_3)\beta_1 + a_1\beta_2 + a_2\beta_3 + a_3\beta_4 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 4

Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich die Datei `medikamente.txt`, die folgende Struktur hat:

Wirkungszeit (in Stunden)	Verabreichung Medikament A	Verabreichung Medikament B
0.98	1	0
1.08	1	0
1.55	0	1
⋮	⋮	⋮

Die Verabreichung der beiden Medikamente wurde wie folgt kodiert:

- 0: Medikament wurde nicht verabreicht,
- 1: Medikament wurde verabreicht.

Für die Daten soll ein lineares Modell mit normalverteilten Störgrößen verwendet werden, wobei die Wirkungszeit die Zielvariable ist.

a) Welche erwarteten Wirkungszeiten haben die Medikamente A und B? (2)

b) Weise nach, dass die Koeffizienten β_1, β_2 und β_3 nicht erwartungstreu schätzbar sind. (1)

c) Weise nach, dass die Linearkombination $\beta_2 - \beta_3$ erwartungstreu schätzbar ist. (2)

d) Teste zum Niveau $1 - \alpha = 0.99$, ob $\beta_2 = \beta_3$ gilt. (2)

e) Berechne ein Konfidenzintervall für $\beta_2 - \beta_3$ zum Niveau $1 - \alpha = 0.99$. (2)

f) Welches Medikament wirkt schneller? Begründe deine Antwort. (1)

Hinweis: Zur Berechnung der verallgemeinerten Inversen kann `ginv()` im Paket `MASS` verwendet werden.