Prof. Dr. E. Spodarev
W. Karcher

Wintersemester 2011 / 2012
25. Januar 2012

Stochastik III – Übungsblatt 7

Abgabe: 8. Februar 2012, vor den Übungen

Aufgabe 1
Zeige, dass folgende Verteilungen zur Exponentialfamilie gehören.

a) Gammaverteilung $\Gamma(p,b)$, $b>0$, mit Dichte (2)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}\exp(-bx), & x\geq 0\\ 0, & \mathit{sonst}\end{cases}$$

wobei $p>0$ bekannt sei.

b) Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$, $p\in(0,1)$ mit Zähldichte (2)

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

wobei $n\in\mathbb{N}$ bekannt sei.

Aufgabe 2
Berechne die natürliche Linkfunktion folgender Verteilungen.

a) Gammaverteilung $\Gamma(p,b)$, $b>0$, wobei $p>0$ bekannt sei. (3)

b) Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$, $p\in(0,1)$, wobei $n\in\mathbb{N}$ bekannt sei. (3)

Aufgabe 3
Auf der Homepage der Vorlesung gibt es die Datei `challenger.txt`, die folgende Werte enthält:

Temperatur	53	57	58	63	66	67	67	67	68	69	70	70
Ausfall	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Temperatur	70	70	72	73	75	75	76	76	78	79	81	
Ausfall	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	

Der Wert *Temperatur* ist die Außentemperatur (in Fahrenheit) beim Start der 23 Space-Shuttle-Flüge vor der Challenger-Katastrophe. Der Parameter *Ausfall* gibt an, ob mindestens einer der Dichtungsringe wegen Materialermüdung ausgefallen ist (1) oder nicht (0).

a) Untersuche mit Hilfe eines logistischen Regressionsmodells (Logit-Modells) den Einfluss der Temperatur auf das Auftreten solcher Materialermüdungserscheinungen. Interpretiere den Output der R-Funktion `summary()` nach Anwendung auf das Ergebnis von `glm()`. (4)

b) Welche Wahrscheinlichkeit wird für das Versagen mindestens eines Dichtungsringes prognostiziert, wenn die Aussentemperatur wie am Unglückstag 31 °F beträgt? (2)

c) Wiederhole Teile a) und b) mit einem entsprechenden Probit-Modell. (3)

d) Zeichne die Messdaten sowie die beiden Kurven der geschätzten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur in ein gemeinsames Schaubild. (2)

Aufgabe 4
Es sei ein verallgemeinertes lineares Regressionsmodell mit natürlicher Linkfunktion gegeben. Um zu untersuchen, wie sich der Erwartungswert der Zielvariablen unter kleinen Änderungen der einzelnen erklärenden Variablen verhält, müssen wir folgende Größen berechnen:

$$\frac{\partial \mathbb{E}Y}{\partial x_i}=\frac{\partial g^{-1}\left(x^\top\beta\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial g^{-1}\left(\beta_1+\beta_2x_2+\ldots,+\beta_m x_m\right)}{\partial x_i},\qquad i=2,\ldots,m$$

Führe eine solche Analyse für

a) eine gammaverteilte Zielvariable mit (unbekanntem) Parameter $b>0$ und bekanntem Parameter $p>0$ (3)

b) eine Poisson-verteilte Zielvariable mit (unbekanntem) Parameter λ (3)

durch und interpretiere das Ergebnis.