Dr. Markus Kunze
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2013/14
29.11.2013

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 6

Abgabe: 6. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf der Menge $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sei $Y = X^2$.

(a) Bestimme $\text{cov}(X, Y)$.

(b) Sind X und Y unabhängig? (Die Antwort ist zu begründen!)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis jede Zahl mindestens einmal gefallen ist. Es bezeichne R die Anzahl der benötigten Würfe. Berechne $\mathbb{E}R$.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, auf $\{1, \ldots, k\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen, $k, n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimme die Verteilung der Zufallsvariablen $M := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
Hinweis: Bestimme zunächst $P(M \leq j)$, für $j = 1, \ldots, k$.

(b) Bestimme $\mathbb{E}M$ für die Werte $k = 5$ und $n = 3$.

Aufgabe 4 (3 + 2 Punkte)

Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen (Werte X_i) und dann das arithmetische Mittel der Messwerte ($Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$) berechnet. Die Zufallsvariable X_i sei der Messwert der i-ten Messung. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist und die Messfehler unabhängig voneinander und gemäß derselben Verteilung auftreten. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1.

(a) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert Y_n der Messungen weniger als 0.1 vom wahren Wert abweicht, mindestens 90 % ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Messung um mehr als die fünffache Standardabweichung neben dem Erwartungswert liegt (wenn man vom schlechtesten Fall der Ungleichung von Tschebyscheff ausgeht)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der in (a) berechneten Anzahl an Messungen mindestens ein solcher Ausreisser auftritt?

Aufgabe 5 (**Wiederholungsaufgabe**, 2 + 2 + 2 Punkte)

Eine Urne enthält jeweils 5 rote, blaue und weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Nach jedem Zug wird die Kugel zurück in die Urne gelegt, und von den beiden Farben die nicht gezogen wurden je eine Kugel durch die gezogene Farbe ersetzt.

(a) Die Ziehung welcher Landesfarben ist wahrscheinlicher: Frankreichs (blau, weiß, rot) oder Österreichs (rot, weiß, rot)? Es soll die Zugreihenfolge beachtet werden.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten in (a), wenn die Zugreihenfolge außer Acht gelassen wird.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis aller drei Ziehungen identisch ist?