Dr. Markus Kunze
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2013/14
13.12.2013

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 8

Abgabe: 20. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 2 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die Veränderung der Getreidepreise (in Euro) in den Monaten Januar bis Dezember 2012.

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1.15	1.86	-0.37	-0.81	0.73	0.51	2.77	2.76	0.3	0.5	-0.1	0.62

(a) Wir fassen die Daten in der Tabelle als Realisierungen einer Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{12})$ auf, wobei bekannt sei, dass die zugehörige Verteilung Varianz $\sigma^2 = 1$ hat. Bestimme ein 95 % Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert μ.

(b) Wie groß müsste der Stichprobenumfang gewählt werden, damit das Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 höchstens die Länge 0.1 hat?

Aufgabe 2 (2 + 4 Punkte)

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $A_2 = \{3, 4, 5\}$.

(a) Bestimme $\sigma(A_1, A_2)$.

(b) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, wobei $\Sigma = \sigma(A_1, A_2)$ ist. Sind die folgenden Abbildungen X und Y Zufallsvariablen? (Eine Antwort ist zu begründen!)

(i) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$

(ii) $Y : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{3, 4, 5\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (2 + 2 + 3 Punkte)

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ mit $\Omega = (0, 1)$ und $\Sigma = \mathscr{B}((0, 1))$ die Borel σ-Algebra auf $(0, 1)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathscr{B}((0, 1)) \to [0, 1]$ ordne jedem Intervall (a, b), $0 \le a < b \le 1$ seine Länge zu (das sogenannte „Lebesguemaß“), d.h. $\mathbb{P}((a, b)) = b - a$.

(a) Finde zwei unabhängige Ereignisse $A_1, A_2 \in \Sigma$, sodass $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2$.

(b) Finde eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \sim \mathsf{b}_{2,1/2}$.

(c) Die Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{falls } \omega \in (0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \omega \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 2\omega - 1 & \text{falls } \omega \in (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

Bestimme die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Die Zufallsvariable

(a) X habe Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \le 0 \\ 2x & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 2x - 1 & \text{falls } x \in (\frac{3}{4}, 1) \\ 1 & \text{falls } x \ge 1 \end{cases}$$

Bestimme $\mathbb{P}(X \in A)$ für $A = \{\frac{1}{2}\}$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ und $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$.

(b) Y habe Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{falls } -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{2} & \text{falls } 0 \le x \le \pi \\ 1 & \text{falls } x > \pi \end{cases}$$

Bestimme $\mathbb{P}(Y < 0)$, $\mathbb{P}(Y > 0)$, $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = \pi)$, $\mathbb{P}(Y \in (-1, -\frac{1}{2}))$ und $\mathbb{P}(Y \in [-1, 1])$.

Skizziere F_X und F_Y.