Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 14 (Bonusblatt)

Abgabe am 4.2.2016 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{U}(0,1)$. Ferner sei Z eine Zufallsvariable mit $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$. Zeige, dass

$$n \min\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{d} Z \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeige, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$,

(iii) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

(a) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\, X_1 = 0$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Zeige, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

(b) Es sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_1^2) < \infty$. Ferner sei Y_j unabhängig von Y_{j-k} und Y_{j+k} für alle $k \geq 2$ und für alle $j > 1$. Zeige, dass

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\, Y_1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Verwende die Ungleichung von Tschebyschew.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,|X_1| < \infty$. Außerdem sei $\mu = \mathbb{E}X_1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ und $N(t) = \max\{n : S_n \le t\}$. Zeige, dass

(a) $N(t) \xrightarrow{f.s.} \infty$ für $t \to \infty$ und $P(N(t) < \infty) = 1$ für jedes $t > 0$,

(b) $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{f.s.} \mu$ für $t \to \infty$,

(c) $\frac{t}{N(t)} \xrightarrow{f.s.} \mu$ für $t \to \infty$ und $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{\mu}$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion und sei $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen U$[0,1]$-verteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{f.s.} \int_0^1 f(x)\,dx$$

für $n \to \infty$, wobei $Z_i = \mathbb{1}_{\{Y_i \le f(X_i)\}}$ für jedes $i \ge 1$.